¿De cuántas formas se puede enrollar una esfera en sí misma?

Teorema del grado de Hopf

Saúl Israel Valdez López
Higinio Serrano García

CINVESTAV

July 31, 2023

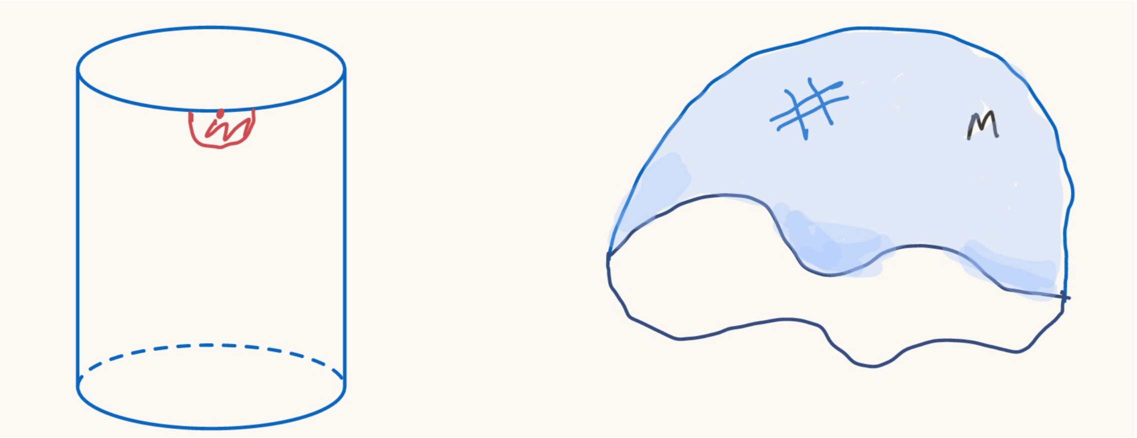
Cinvestav

VARIEDADES CONFRONTERA

Definición 1

Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^N$ es una variedad con frontera de dimensión n si todo punto $x \in M$ tiene una vecindad U difeomorfa a un subconjunto abierto V del plano superior $H^n \subset \mathbb{R}^n$.

La frontera de M son los puntos correspondientes a la frontera de H^n bajo un difeomorfismo local. Para denotar la frontera de M utilizamos el símbolo ∂M.



Suavidad:

(a) Dado un punto $x \in M$ tomamos una carta local (U, φ, V),

(b) Consideramos la parametrización local $\varphi^{-1} : V \to U$,

(c) Extendemos φ^{-1} a una función suave en un abierto de $\mathbb{R}^n$.

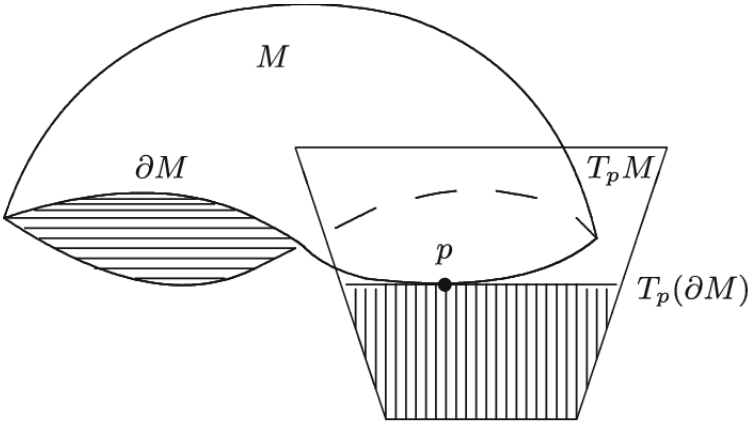
Observación 1

Si M es una variedad de dimensión n, entonces ∂M es una variedad de dimensión $n-1$.

Observación 2

El espacio $T_x\partial M$ es un subespacio de T_xM. Si ∂f es la restricción de f a ∂M, entonces la derivada $d\partial f_x$ es la restricción de df_x a $T_x\partial M$.

Variedades con frontera

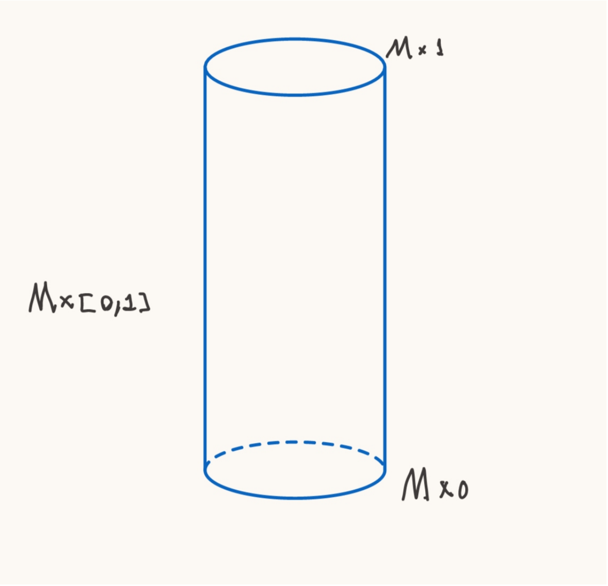


Proposición 1

El producto de una variedad sin frontera M y una variedad con frontera N es una variedad con frontera

$$\partial M \times N = M \times \partial N.$$

VARIEDADES CON FRONTERA



Proposición 2

Sea M una variedad sin frontera y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función suave con cero como valor regular. Entonces el subconjunto $\{x \in M : f(x) \geq 0\}$ es una variedad con frontera $f^{-1}(0)$.

Definición 2

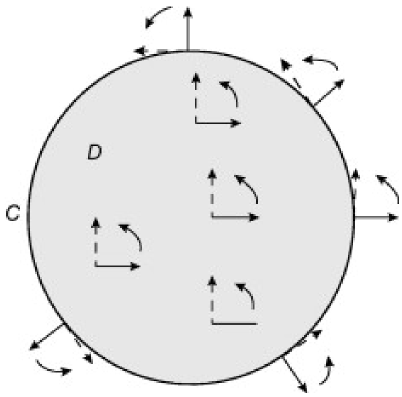
Una orientación para un espacio vectorial de dimensión finita es una clase de equivalencia de bases ordenadas definida como sigue. Las Bases $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ *son equivalentes si la matriz de cambio de coordenadas* $C = (c_{ij})$, $b_j = \sum c_{ij} a_i$, *tiene determinante positivo.*

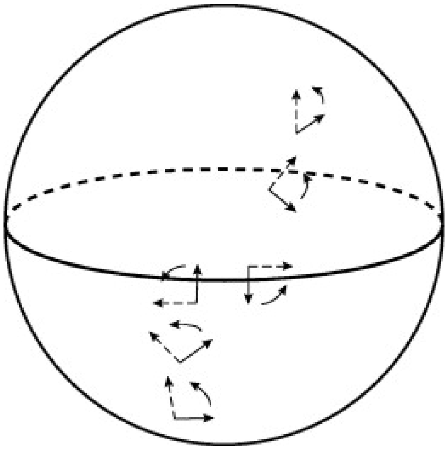
Orientación en variedades:

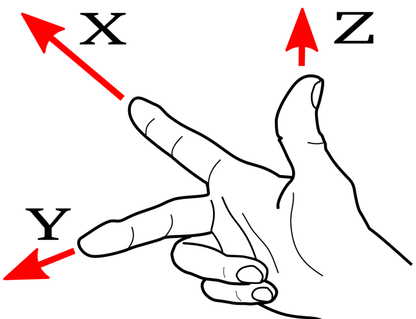
(a) Asignamos a cada espacio tangente $T_x M$ una orientación,

(b) Dado un punto $x \in M$ existe una carta local (U, φ, V) tal que $d\varphi_y$ lleva la orientación establecida en $T_y M$ a la orientación estándar en $\mathbb{R}^n$ para todo $y \in U$.

Variedades con frontera







VARIEDADES CON FRONTERA

No todas las variedades son orientables.

Proposición 3

Sean M y N variedades sin frontera de dimensión n. Asumamos que M es compacta y N conexa. Si y es un valor regular de una función suave $f : M \to N$, entonces el subconjunto $f^{-1}(y)$ es finito.

Definición 3

Llamamos grado de $f : M \to N$ al entero

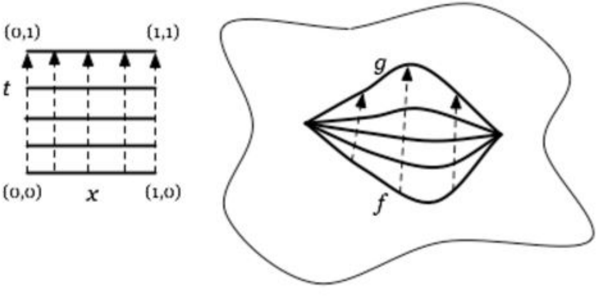
$$deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sign(df_x),$$

donde $sign(df_x)$ es 1 o -1 de acuerdo a si df_x preserva orientación o no.

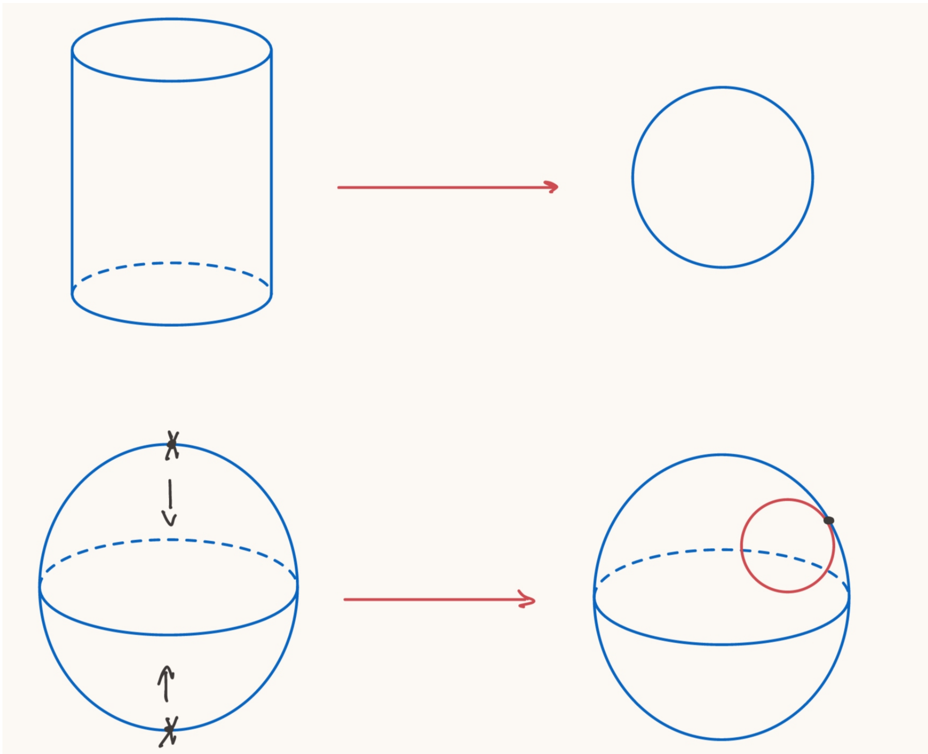
Por supuesto, este número es igual para cualquier valor regular de f.

Definición 4

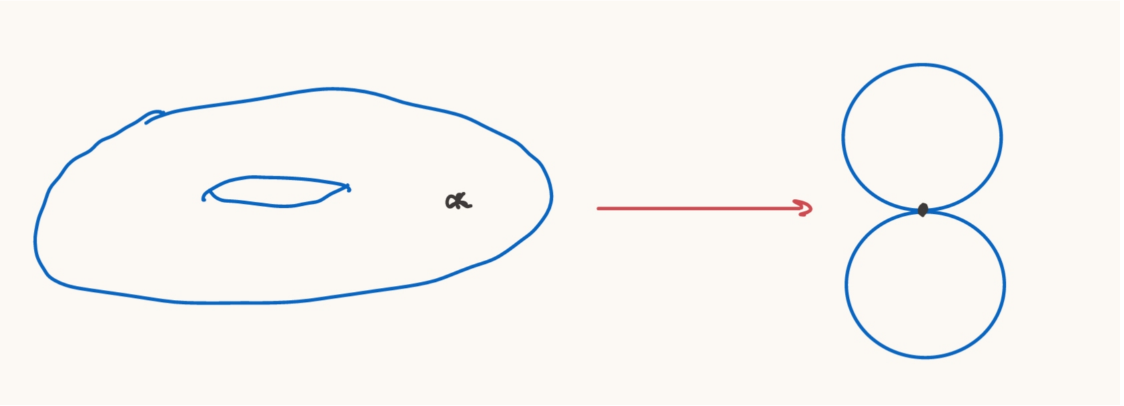
Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Decimos que una función continua $F : X \times I \to Y$ es una homotopía entre f y g si $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$. En tal caso escribimos $f \simeq g$.



HOMOTOPÍA



Homotopía

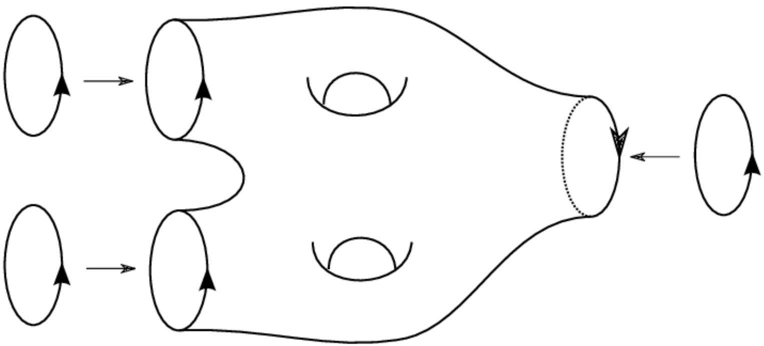


Teorema 1 (Hopf)

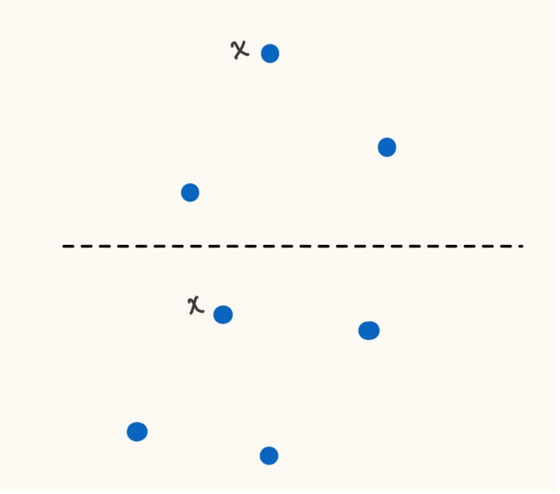
Si f es homotopicamente suave a g, entonces $deg(f) = deg(g)$.

Definición 5

Dos variedades M y N se dice que son cobordantes si existe una variedad W, cuya frontera es la unión disjunta M y N. En tal caso se dice que W es un cobordismo entre M y N.



Cobordismo



En nuestro contexto, hablaremos de cobordismo dentro de una variedad establecida.

Cobordismo

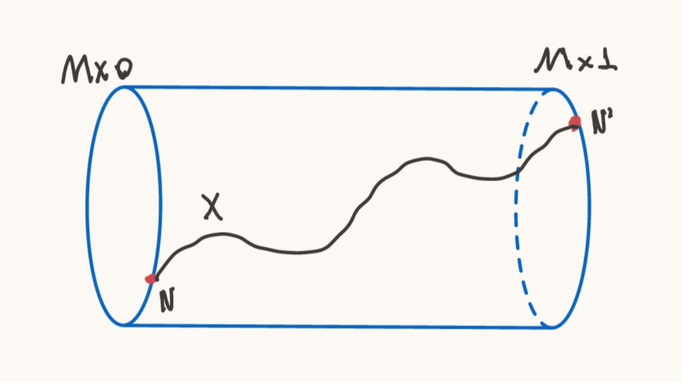
Sea M una variedad cerrada de dimensión m. Dos variedades N y N' de dimensión n se dice que son cobordantes dentro de M si se cumple lo siguiente.

(a) El subconjunto $N \times [0, \epsilon) \cup N' \times (1 - \epsilon, 1]$ se puede extender a una subvariedad compacta

$$X \subset M \times [0, 1],$$

(b) $\partial X = N \times 0 \cup N' \times 1$,

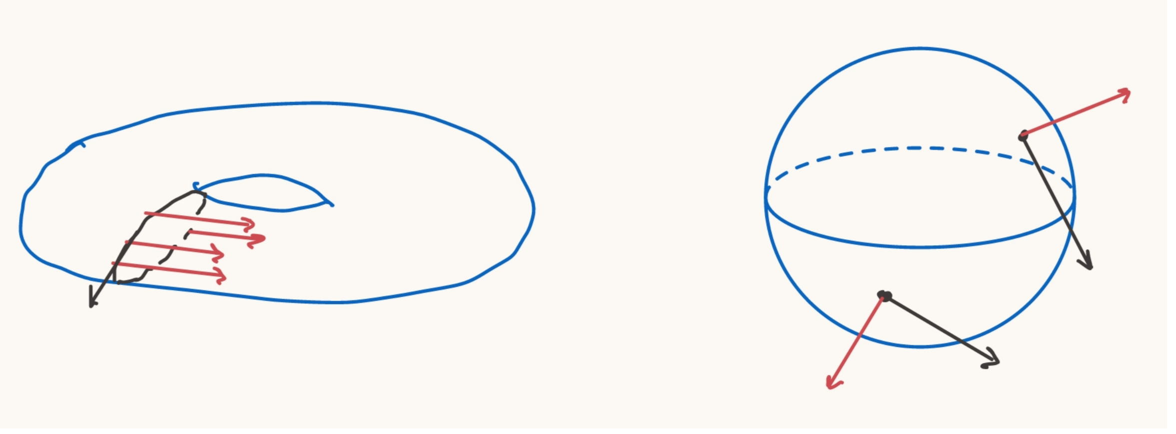
(c) $X \cap (M \times 0 \cup M \times 1) \subset \partial X$.



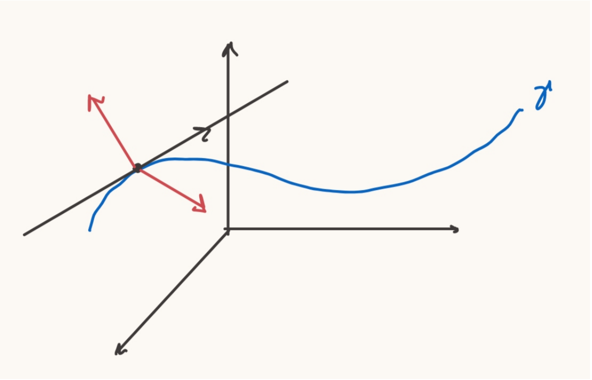
Definición 6

Un enmarcado de una subvariedad $N \subset M$ es una función suave $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^{m-n})$ que asocia a cada punto $x \in N$ una base del espacio vectorial $T_x N^\perp \subset T_x M$

$$x \mapsto (\varphi^1(x), \ldots, \varphi^{m-n}(x)).$$



VARIEDADES DE PONTRYAGIN



Llamamos al (N, φ) una subvariedad enmarcada de M.

Definición 7

Dos subvariedades enmarcadas $(N, \phi), (W, \psi)$ (con la misma dimensión) se dicen enmarcadas cobordantes si $X \subset M \times [0, 1]$ es un cobordismo de N y W y existe un enmarcado φ de X, tal que

(a) $\varphi^i(y,t) = (\phi^i(y), 0)$, $(y,t) \in N \times [0,\epsilon)$,
(b) $\varphi^i(y,t) = (\psi^i(y), 0)$, $(y,t) \in W \times (1-\epsilon, 1]$.

Las variedades de Pontryagin se construyen como sigue.

- Sea $f : M \to S^p$ una función suave y y un valor regular de f,
- Escojamos una base orientada $B = (b_1, \ldots, b_p)$ para $T_y S^p$,
- Existe un único vector $v^i(x) \in T_x f^{-1}(y)^{\perp} \subset T_x M$ tal que $df_x(v^i(x)) = b^i$.

Definición 8

Denotemos por f^*B al enmarcado $x \mapsto (v^1(x), \ldots, v^{m-p}(x))$ correspondiente a la subvariedad $f^{-1}(y)$. Llamaremos a la subvariedad enmarcada $(f^{-1}(y), f^*B)$ variedad de Pontryagin asociada f.

TEOREMA Y ALGUNAS CONSECUENCIAS

Teorema 2 (del grado de Hopf)

Sean $f, g : M \longrightarrow S^n$ dos mapeos de una variedad suave, cerrada, conexa y orientable de dimensión n a S^n. Entonces $f \simeq g$ si y solo si $\deg f = \deg g$.

Teorema 2 (del grado de Hopf)

Sean $f, g : M \longrightarrow S^n$ *dos mapeos de una variedad suave, cerrada, conexa y orientable de dimensión* n *a* S^n*. Entonces* $f \simeq g$ *si y solo si* $\deg f = \deg g$*.*

$X, Y =$espacios topológicos

$$\mathsf{Map}(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ es continua}\}$$

Teorema 2 (del grado de Hopf)

Sean $f, g : M \longrightarrow S^n$ dos mapeos de una variedad suave, cerrada, conexa y orientable de dimensión n a S^n. Entonces $f \simeq g$ si y solo si $\deg f = \deg g$.

$X, Y =$espacios topológicos

$$\mathrm{Map}(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ es continua}\}$$

$$[X, Y] = \mathrm{Map}(X, Y)/\text{homotopía}$$

Teorema y algunas consecuencias

Teorema 2 (del grado de Hopf)

Sean $f, g : M \longrightarrow S^n$ dos mapeos de una variedad suave, cerrada, conexa y orientable de dimensión n a S^n. Entonces $f \simeq g$ si y solo si $\deg f = \deg g$.

$X, Y =$espacios topológicos

$$\mathrm{Map}(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ es continua}\}$$

$$[X, Y] = \mathrm{Map}(X, Y)/\text{homotopía}$$

$$[M, S^n] \overset{\deg}{\cong} \mathbb{Z}$$

Teorema 2 (del grado de Hopf)

Sean $f, g : M \longrightarrow S^n$ dos mapeos de una variedad suave, cerrada, conexa y orientable de dimensión n a S^n. Entonces $f \simeq g$ si y solo si $\deg f = \deg g$.

$X, Y =$espacios topológicos

$$\mathrm{Map}(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ es continua}\}$$

$$[X, Y] = \mathrm{Map}(X, Y)/\text{homotopía}$$

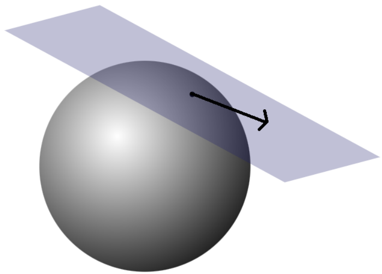
$$[M, S^n] \overset{\deg}{\cong} \mathbb{Z}$$

$$[S^n, S^n] \overset{\deg}{\cong} \mathbb{Z}$$

Campos tangentes

Definición 9

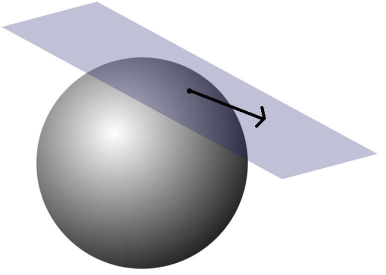
Un campo vectorial tangente a S^n es una función suave $v : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\langle x, v(x) \rangle = 0$

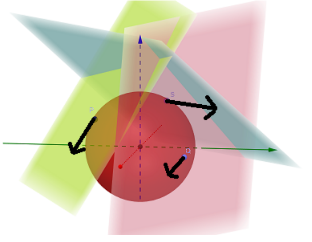


Campos tangentes

Definición 9

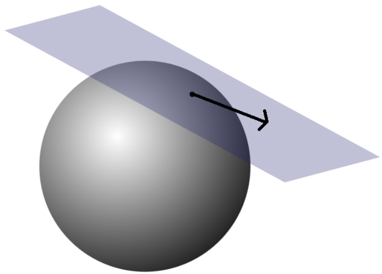
Un campo vectorial tangente a S^n es una función suave $v : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\langle x, v(x)\rangle = 0$

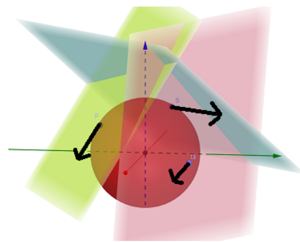


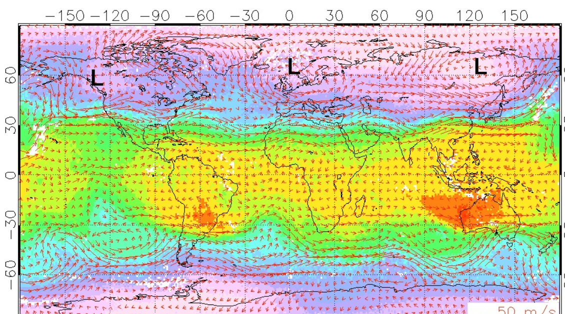


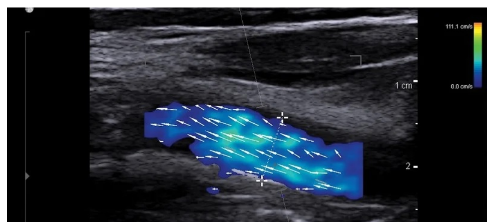
Definición 9

Un campo vectorial tangente a S^n es una función suave $v : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\langle x, v(x)\rangle = 0$









Proposición 4

Existe un campo vectorial sobre S^n que no se anula si y solo si n es impar.

Proposición 4

Existe un campo vectorial sobre S^n que no se anula si y solo si n es impar.

Demostración. Supongamos que n es impar, entonces definamos el campo tangente

$$\begin{aligned} v : S^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) &\longmapsto (-x_2, x_1, \ldots, -x_{n+1}, x_n). \end{aligned}$$

Es claro que $\langle x, v(x) \rangle = 0$ y que $v(x) \neq 0$ para todo $x \in S^n$.

Proposición 4

Existe un campo vectorial sobre S^n que no se anula si y solo si n es impar.

Demostración. Supongamos que n es impar, entonces definamos el campo tangente

$$v : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \longmapsto (-x_2, x_1, \ldots, -x_{n+1}, x_n).$$

Es claro que $\langle x, v(x)\rangle = 0$ y que $v(x) \neq 0$ para todo $x \in S^n$.
Supongamos que n es par y que existe un campo vectorial que no se anula $v : S^n \longrightarrow S^n$.
Definimos la homotopía

$$H : I \times S^n \longrightarrow S^n$$
$$(t, x) \longmapsto (\cos \pi t)x + (\sin \pi t)v(x)$$

Entonces H es una homotopía entre $H(0, x) = x$ y $H(1, x) = -x$. Pero $\deg(id_{S^n}) = 1$ y $\deg(A) = -1$.

Proposición 4

Existe un campo vectorial sobre S^n que no se anula si y solo si n es impar.

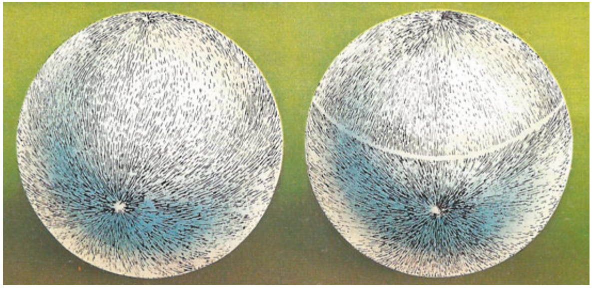
Demostración. Supongamos que n es impar, entonces definamos el campo tangente

$$\begin{aligned} v : S^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) &\longmapsto (-x_2, x_1, \ldots, -x_{n+1}, x_n). \end{aligned}$$

Es claro que $\langle x, v(x)\rangle = 0$ y que $v(x) \neq 0$ para todo $x \in S^n$.
Supongamos que n es par y que existe un campo vectorial que no se anula $v : S^n \longrightarrow S^n$.
Definimos la homotopía

$$\begin{aligned} H : I \times S^n &\longrightarrow S^n \\ (t, x) &\longmapsto (\cos \pi t)x + (\sin \pi t)v(x) \end{aligned}$$

Entonces H es una homotopía entre $H(0, x) = x$ y $H(1, x) = -x$. Pero $\deg(id_{S^n}) = 1$ y $\deg(A) = -1$.



Grupos de homotopía

$(X, x_0) =$ espacio topológico con punto base

$\pi_n(X, x_0) = \{f : S^n \longrightarrow X \mid f$ continua y $f(x_0) = x_0\}/$homotopía

Grupos de homotopía

$(X, x_0) =$ espacio topológico con punto base

$\pi_n(X, x_0) = \{f : S^n \longrightarrow X \mid f$ continua y $f(x_0) = x_0\}/$homotopía

Teorema 3

Existe un isomorfismo

$$\pi_n(S^n) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

Grupos de homotopía

(X, x_0) = espacio topológico con punto base

$\pi_n(X, x_0) = \{f : S^n \longrightarrow X \mid f \text{ continua y } f(x_0) = x_0\}/\text{homotopía}$

Teorema 3

Existe un isomorfismo

$$\pi_n(S^n) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z}$$

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_{13}	π_{14}	π_{15}
S^0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\times\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$
S^3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\times\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$
S^4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{24}\times\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_{120}\times\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\times\mathbb{Z}_2^5$
S^5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_{72}\times\mathbb{Z}_2$
S^6	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{60}$	$\mathbb{Z}_{24}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$
S^7	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{120}$	$\mathbb{Z}_2^3$
S^8	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{120}$

Grupos de homotopía

(X, x_0) = espacio topológico con punto base

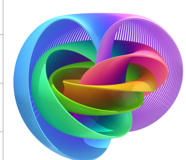
$\pi_n(X, x_0) = \{f : S^n \longrightarrow X \mid f \text{ continua y } f(x_0) = x_0\}/\text{homotopía}$

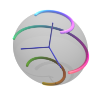
Teorema 3

Existe un isomorfismo

$$\pi_n(S^n) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z}$$

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_{13}	π_{14}	π_{15}
S^0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\times\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$
S^3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\times\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$
S^4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{24}\times\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_{120}\times\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\times\mathbb{Z}_2^5$
S^5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_{72}\times\mathbb{Z}_2$
S^6	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{60}$	$\mathbb{Z}_{24}\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$
S^7	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{120}$	$\mathbb{Z}_2^3$
S^8	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{120}$





DEM. TEOREMA DE HOPF (IDA)

$$f : M \longrightarrow S^n \longmapsto f^{-1}(y) \longmapsto \deg(f)$$

$$g : M \longrightarrow S^n \longmapsto g^{-1}(y) \longmapsto \deg(g)$$

Dem. Teorema de Hopf (ida)

$$f : M \longrightarrow S^n \longmapsto f^{-1}(y) \longmapsto \deg(f)$$

$$H : I \times M \longrightarrow S^n \longmapsto H^{-1}(y) \longmapsto =$$

$$g : M \longrightarrow S^n \longmapsto g^{-1}(y) \longmapsto \deg(g)$$

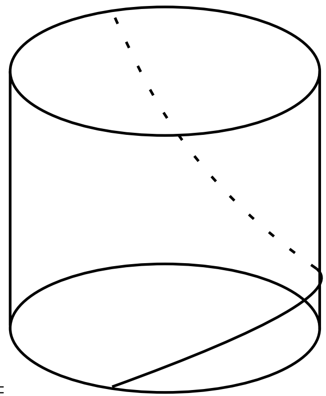
$id : S^1 \longrightarrow S^1 \; id(x) = x$
$A : S^1 \longrightarrow S^1 \; A(x) = -x$

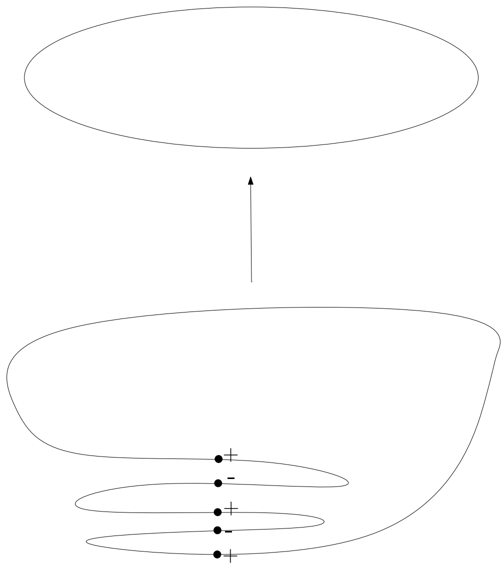
$id : S^1 \longrightarrow S^1 \; id(x) = x$
$A : S^1 \longrightarrow S^1 \; A(x) = -x$
$id^{-1}(y) = \{y\}, A^{-1}(y) = \{-y\}$

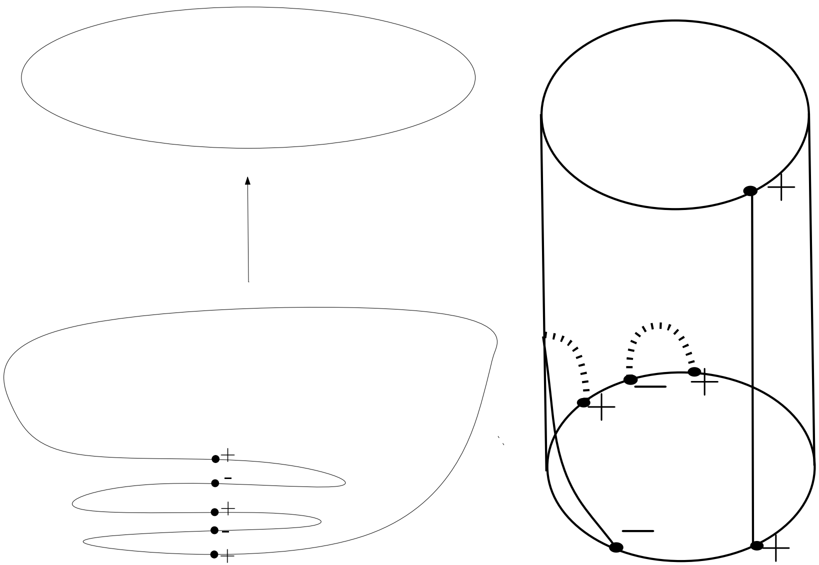
$id : S^1 \longrightarrow S^1 \; id(x) = x$
$A : S^1 \longrightarrow S^1 \; A(x) = -x$
$id^{-1}(y) = \{y\}$, $A^{-1}(y) = \{-y\}$
$\deg(id) = 1$, $\deg(A) = 1$

$id : S^1 \longrightarrow S^1 \; id(x) = x$
$A : S^1 \longrightarrow S^1 \; A(x) = -x$
$id^{-1}(y) = \{y\}$, $A^{-1}(y) = \{-y\}$
$\deg(id) = 1$, $\deg(A) = 1$

$$\begin{aligned} H : I \times S^1 &\longrightarrow S^1 \\ (t, x) &\longmapsto \cos(\pi t)(x_1, x_2) + (1-t)\sin(\pi t)(-x_2, x_1) \end{aligned}$$

$H^{-1}(y) =$ 

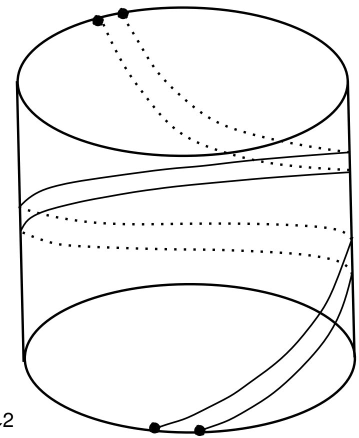




$f : S^1 \longrightarrow S^1 \; f(x) = x^2$

$g : S^1 \longrightarrow S^1 \; f(x) = -x^2$

$f : S^1 \longrightarrow S^1 \; f(x) = x^2$



$g : S^1 \longrightarrow S^1 \; f(x) = -x^2$

(REGRESO)

Si $\deg(g) = \deg(f)$, entonces podemos construir un cobordismo entre $f^{-1}(y)$ y $g^{-1}(y)$.

(REGRESO)

Si $\deg(g) = \deg(f)$, entonces podemos construir un cobordismo entre $f^{-1}(y)$ y $g^{-1}(y)$.

Basta mostrar que tener lass variedades de Pontryagin $f^{-1}(y)$ y $g^{-1}(y)$ cobordantes implica que las funciones f y g son homotópicas.

(REGRESO)

Si $\deg(g) = \deg(f)$, entonces podemos construir un cobordismo entre $f^{-1}(y)$ y $g^{-1}(y)$.

Basta mostrar que tener lass variedades de Pontryagin $f^{-1}(y)$ y $g^{-1}(y)$ cobordantes implica que las funciones f y g son homotópicas.
Supongamos que existe una vecindad abierta V de $f^{-1}(y)$ tal que $f(x) = g(x)$ $\forall x \in V$.

(REGRESO)

Si $\deg(g) = \deg(f)$, entonces podemos construir un cobordismo entre $f^{-1}(y)$ y $g^{-1}(y)$.

Basta mostrar que tener lass variedades de Pontryagin $f^{-1}(y)$ y $g^{-1}(y)$ cobordantes implica que las funciones f y g son homotópicas.
Supongamos que existe una vecindad abierta V de $f^{-1}(y)$ tal que $f(x) = g(x)\ \forall x \in V$.Definamos la homotopía

$$
\begin{aligned}
H : I \times M &\longrightarrow S^n \\
(t, x) &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in V \\ h^{-1}\left(th(f(x)) + (1-t)h(g(x))\right) & \text{si } x \in M - f^{-1}(y) \end{cases}
\end{aligned}
$$

$h : S^n/\{y\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ proy. estereográfica

(REGRESO)

Si $\deg(g) = \deg(f)$, entonces podemos construir un cobordismo entre $f^{-1}(y)$ y $g^{-1}(y)$.

Basta mostrar que tener lass variedades de Pontryagin $f^{-1}(y)$ y $g^{-1}(y)$ cobordantes implica que las funciones f y g son homotópicas.
Supongamos que existe una vecindad abierta V de $f^{-1}(y)$ tal que $f(x) = g(x)\ \forall x \in V$.Definamos la homotopía

$$H : I \times M \longrightarrow S^n$$
$$(t, x) \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in V \\ h^{-1}\left(th(f(x)) + (1-t)h(g(x))\right) & \text{si } x \in M - f^{-1}(y) \end{cases}$$

$$h : S^n/\{y\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ proy. estereográfica}$$

La suposición de que f y g coinciden en una vecindad de $f^{-1}(y)$ proviene de una propiedad llamada enmarcación que satisfacen las varidades de la forma $f^{-1}(y)$

TEOREMA DE POINCARÉ-HOPF

Teorema 4

Sean M una variedad compacta y sin frontera y $v : M \longrightarrow TM$ un campo tangente con ceros aislados. Entonces tenemos la formula

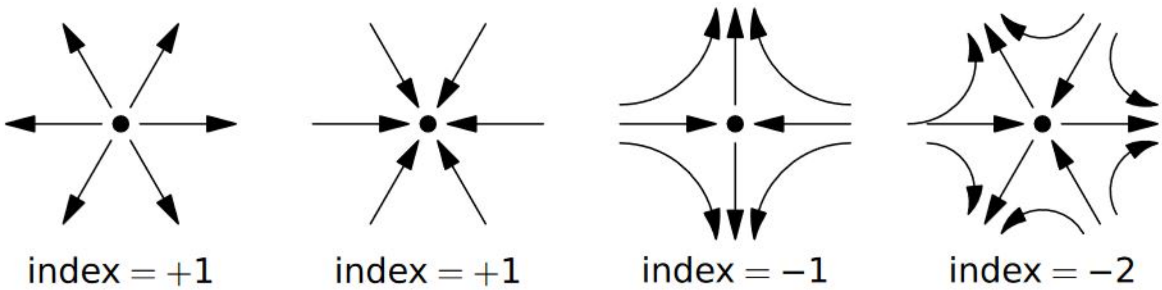
$$\sum_i \mathrm{ind}_{x_i}(v) = \chi(M)$$

TEOREMA DE POINCARÉ-HOPF

Teorema 4

Sean M una variedad compacta y sin frontera y $v : M \longrightarrow TM$ un campo tangente con ceros aislados. Entonces tenemos la formula

$$\sum_i \mathrm{ind}_{x_i}(v) = \chi(M)$$



Teorema 5

M admite un campo tangente que no se anula si y solo si $\chi(M) = 0$


Cobordismo
Homotopia
Grado