El espacio proyectivo

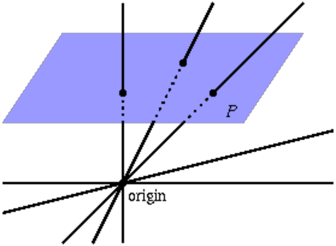
Miguel A. Xicoténcatl Merino

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del IPN

Escuela de Verano, Julio 2023

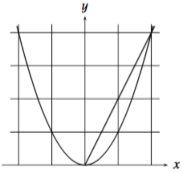
El plano proyectivo

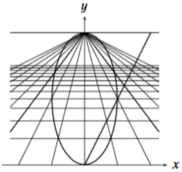
Definición: $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ es el conjunto de todas las rectas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por 0.



Contiene al plano (euclidiano) $\mathbb{R}^2$

... y puntos al infinito





Formalmente: (Ejem. como espacio topológico)

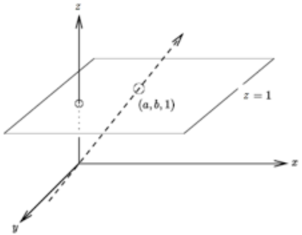
$$\mathbb{R}\mathsf{P}^2 = \mathbb{R}^3 - (0,0,0) \Big/ \begin{array}{c} (x,y,z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^\times \end{array}$$

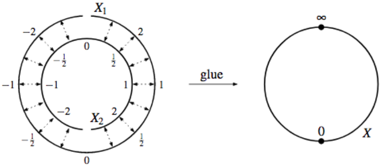
Clases de equivalencia: $[x : y : z]$ (coordenadas homogéneas)

$$[x : y : z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z], \qquad \lambda \neq 0$$

El plano afín:

$$U = \{ \, [x : y : z] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \mid z \neq 0 \, \} \quad \xrightarrow{\approx} \quad \mathbb{R}^2$$
$$[x : y : z] = [\tfrac{x}{z} : \tfrac{y}{z} : 1] \quad \longmapsto \quad (\tfrac{x}{z}, \tfrac{y}{z})$$





Puntos al infinito:

$$\{[x : y : 0] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\} \quad \approx \quad S^1$$

$$= W_x \cup W_y \qquad \text{con} \qquad W_x, W_y \approx \mathbb{R}$$

Cartas coordenadas:

$$U_x = \{\, [x:y:z] \in \mathbb{R}\mathsf{P}^2 \;\mid\; x \neq 0\}$$

$$U_y = \{\, [x:y:z] \in \mathbb{R}\mathsf{P}^2 \;\mid\; y \neq 0\}$$

$$U_z = \{\, [x:y:z] \in \mathbb{R}\mathsf{P}^2 \;\mid\; z \neq 0\}$$

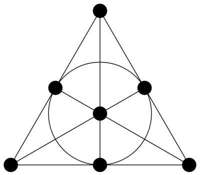
$$\Rightarrow \qquad \mathbb{R}\mathsf{P}^2 = U_x \cup U_y \cup U_z$$

- U_x, U_y, U_z son homeomorfos a $\mathbb{R}^2$.
- Cambios de coordenadas son suaves.

$\therefore$ $\mathbb{R}\mathsf{P}^2$ es una variedad de dim. 2 (geom. diferencial)

El plano de Fano

Definición: Es el "plano proyectivo" sobre $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.

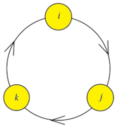


- Subespacios de dim 1 de $(\mathbb{F}_2)^3$
- 7 puntos (y 7 rectas)
- 3 rectas por cada punto
- 3 puntos en cada recta

Cuaternios:

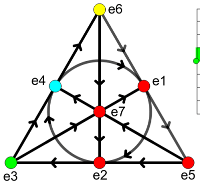
$$\mathbb{H} = \mathbb{R}^4 = \mathcal{L}(1, i, j, k)$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$



Octonios: (números de Cayley)

$$\mathbb{O} = \mathbb{R}^8 = \mathcal{L}(1, e_1, \ldots, e_7)$$



	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7
e1	−1	e4	e7	−e2	e6	−e5	−e3
e2	−e4	−1	e5	e1	−e3	e7	−e6
e3	−e7	−e5	−1	e6	e2	−e4	e1
e4	e2	−e1	−e6	−1	e7	e3	−e5
e5	−e6	e3	−e2	−e7	−1	e1	e4
e6	e5	−e7	e4	−e3	−e1	−1	e2
e7	e3	e6	−e1	e5	−e4	−e2	−1

Espacio proyectivo de dim. n

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ó un campo arbitrario

Definición: El espacio proyectivo $\mathsf{P}^n(\mathbb{K})$ es el conjunto de rectas en $\mathbb{K}^{n+1}$ que pasan por el origen.

$$\mathsf{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n+1} - \{\vec{0}\} \Big/ \vec{v} \sim \lambda\vec{v} \qquad \begin{array}{l} \forall\, \vec{v} \neq \vec{0} \\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}^\times \end{array}$$

Clases de equivalencia: (coordenadas homogéneas)

$$[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] = [\lambda z_0 : \lambda z_1 : \ldots : \lambda z_n] \qquad \lambda \neq 0$$

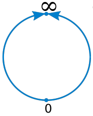
Cartas coordenadas:

$$U_i = \{\, [z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \in \mathsf{P}^n(\mathbb{K}) \;\mid\; z_i \neq 0\}$$

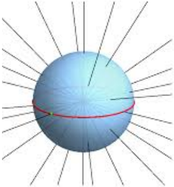
$$\Rightarrow \qquad \mathsf{P}^n(\mathbb{K}) = U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n$$

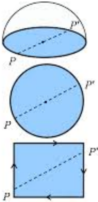
Topología: $\mathbb{R}\mathsf{P}^n$ ó $\mathbb{C}\mathsf{P}^n$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ (respect.)

$\mathbb{R}\mathsf{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^0$



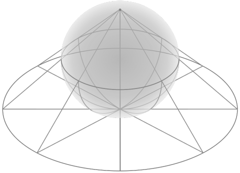
$\mathbb{R}\mathsf{P}^2 = S^2/x \sim \pm x$





$\mathbb{R}\mathsf{P}^3 = SO(3)$ gpo. de rotaciones de $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{C}\mathsf{P}^1$ esfera de Riemann



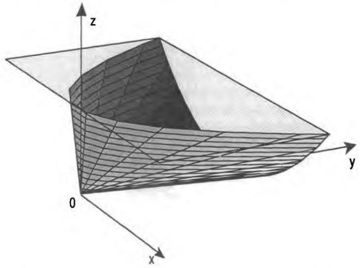
Plano proyectivo complejo:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\mathsf{P}^2 &= \mathbb{C}\mathsf{P}^1 \cup \mathbb{A}^2 \\ &= S^2 \cup_\eta e^4 \end{aligned}$$

donde $\eta : S^3 \to S^2$ mapeo de Hopf

$$\eta(z,w) = \begin{cases} z/w & w \neq 0 \\ \infty & w = 0 \end{cases}$$

Cerradura proyectiva de una cónica



$y = x^2$ $\qquad z = 1$

Puntos: $(x, x^2, 1)$

Rectas: $(tx, tx^2, t), \quad t \neq 0$

$$(tx)^2 = (tx^2)t$$

$$x^2 = yz$$

$$V = \{ [x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid x^2 - yz = 0 \}$$

cerradura proyectiva

(Visualizar en $\mathbb{R}^3$: teclear z = x ^ 2 / y en Google)

Variedades algebraicas en $\mathbb{P}^n$

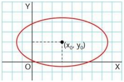
- Se usan polinomios homogéneos en $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$.

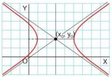
- $PGL_{n+1}(\mathbb{K}) = GL_{n+1}(\mathbb{K})/\mathbb{K}^\times$ actúa en $\mathbb{P}^n$. En particular, $PGL_2(\mathbb{K})$ actúa en $\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$:

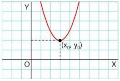
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} [z : w] \mapsto [az + bw : cz + dw] \qquad w = 1 \qquad [z : 1] \mapsto \left[\frac{az+b}{cz+d} : 1 \right]$$

Plano euclidiano $\mathbb{R}^2$

- 3 tipos de cónicas (no degeneradas)



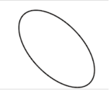




- 72 tipos de cúbicas enumeradas por Newton

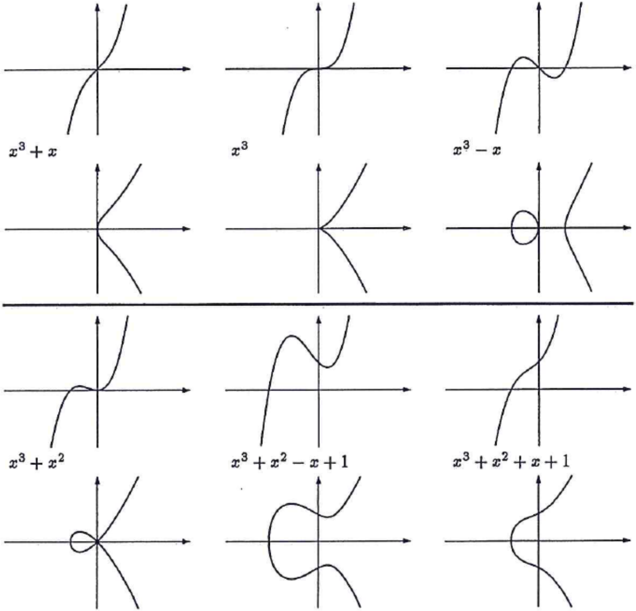
Plano proyectivo $\mathbb{P}^2$

- Una cónica (no degenerada)



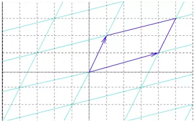
- 3 tipos de cúbicas (salvo equivalencia proyectiva)

Ejemplo: Parábolas divergentes de Newton: las curvas $y = g(x)$ y $y^2 = g(x)$

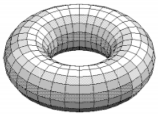


Curvas Elípticas

Definición: Una curva elíptica E es una curva cúbica suave en $\mathbb{P}^2$.

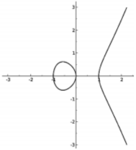


$\Lambda =$ lattice en $\mathbb{C}$



$\mathbb{C}/\Lambda$

$\overset{?}{\cong}$



Teorema: Para toda E existe una lattice $\Lambda = \langle 1, \tau \rangle$, con $Im(\tau) > 0$

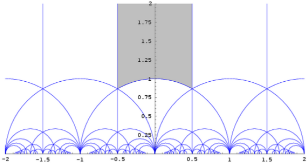
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}/\langle 1, \tau\rangle & \xrightarrow{\cong} & E \subset \mathbb{P}^2 \\ z & \longmapsto & [1 : \wp(z) : \wp'(z)] \end{array}$$

- $\wp$ es la función de Weierstrass

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

- $E_\tau \cong E_{\tau'} \quad \Longleftrightarrow \quad \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + b}$

  alguna $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$



Espacio *moduli* de curvas elípticas

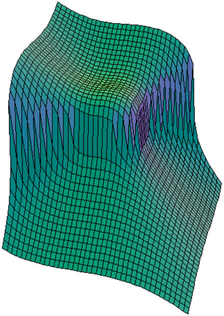
La cúbica de Fermat

Superficie en $\mathbb{A}^3$ dada por:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

En el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$:

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$$



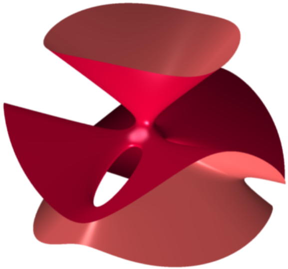
Teorema: **Toda superficie cúbica suave en $\mathbb{P}^3$ contiene 27 líneas.**
(ver video)

Las 27 líneas en V son:

- 9 líneas de la forma $(x_0 : ax_0 : x_2 : bx_2)$ con $a^3 = b^3 = -1$.
- 18 "conjugados" bajo permutación de coordenadas.

Superficie cúbica de Clebsch

Lugar geométrico de puntos $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ en $\mathbb{P}^4$ que satisfacen:



$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \\ x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0 \end{cases}$$

Eliminando x_0, es isomorfa a:

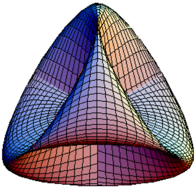
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 \quad \text{en} \quad \mathbb{P}^3$$

- "Blow-up" de $\mathbb{P}^2$ en 6 puntos.
- Grupo de simetrías es el grupo simétrico S_5 (única salvo iso)
- Las 27 líneas son reales.

Variedad de Veronese

Superficie de Veronese: imagen del encaje $\nu : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$

$$\nu[x : y : z] = [x^2 : y^2 : z^2 : xy : xz : yz]$$



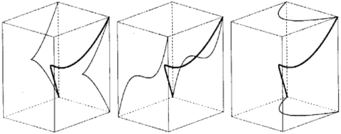
Mapeo de Veronese de grado d:

$$\nu_d : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m \qquad \text{con} \qquad m = \binom{n+d}{d} - 1$$

- $n = 1,\ d = 2$: $[x^2 : xy : y^2]$
  Coord. afines: (x, x^2), parábola.
- $n = 1,\ d = 3$: **cúbica labeada**

  $$[x^3 : x^2y : xy^2 : y^3]$$

  Coord. afines: $(t,\ t^2,\ t^3)$



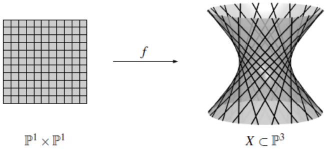
$y^3 = z^2$ $\qquad z = x^3$ $\qquad y = x^2$

Variedad de Segre $\Sigma_{n,m}$

Encaje de Segre:

$$\begin{array}{rcl}\sigma : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m & \longrightarrow & \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1} \\ (\,[\mathbf{X}],\,[\mathbf{Y}]\,) & \longmapsto & [x_0y_0 : x_0y_1 : \ldots : x_iy_j : \ldots : x_ny_m]\end{array}$$

- Cuádrica en $\mathbb{P}^3$:



Variedad en $\mathbb{P}^3$ dada por:

$$\det \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} = z_0z_3 - z_1z_2$$

- 3-fold de Segre $\Sigma_{1,2}$ en $\mathbb{P}^5$: $\Sigma_{1,2} \cap \mathbb{P}^3 =$ cúbica labeada

- Restricción a $\Delta \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ es el mapeo de Veronese

$$\nu_2 : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{n^2+2n} \quad \text{(grado 2)}$$