Una breve introducción al análisis asintótico

M. en C. Alejandro Soto González
M. en C. Juanita Gasca Arango

Departamento de Matemáticas del Cinvestav-IPN

Escuela de verano 2023

Parte 1: Conceptos básicos

Tomemos las funciones $\sin(1/x)$ y $1/x$ definidas sobre $(0, \infty)$.

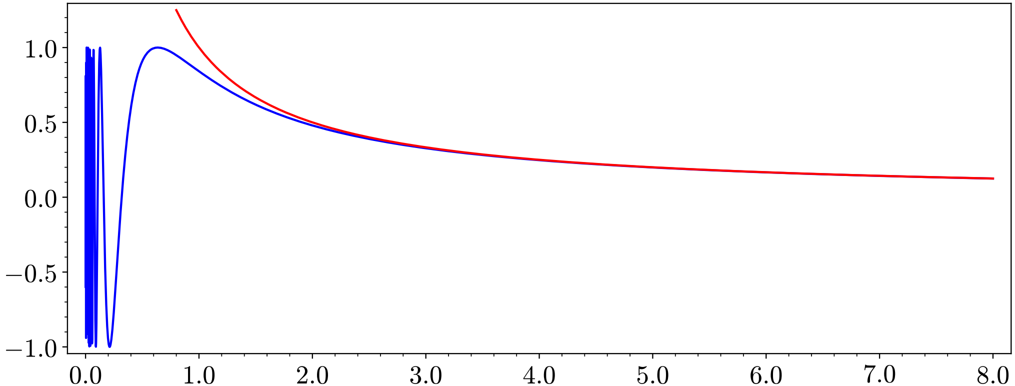

Figura. Funcion $\sin(1/x)$ en azul y $1/x$ en rojo.

Parte 1: Conceptos básicos

Tomemos las funciones $\sin(1/x)$ y $1/x$ definidas sobre $(0, \infty)$.

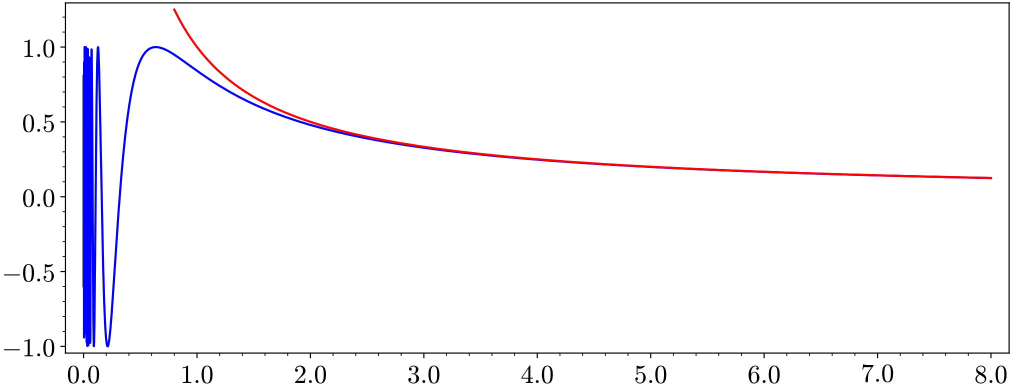

Figura. Funcion $\sin(1/x)$ en azul y $1/x$ en rojo.

Entonces para valores grandes de x

$$\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}.$$

SÍMBOLOS $\sim$, o Y O

Sean $f, g\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones.

Símbolos $\sim$, o y O

Sean $f, g\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones.

Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \geq b$, y $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ cuando $x \to \infty$, decimos que g es una aproximación asintótica de f, y escribimos

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to \infty).$$

SÍMBOLOS $\sim$, o Y O

Sean $f, g\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones.

Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \geq b$, y $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ cuando $x \to \infty$, decimos que g es una aproximación asintótica de f, y escribimos

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to \infty).$$

Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \geq b$, y $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ cuando $x \to \infty$, decimos que f es de orden menor que g, y escribimos

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to \infty).$$

Símbolos $\sim$, o y O

Sean $f, g\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones.

Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \geq b$, y $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ cuando $x \to \infty$, decimos que g es una aproximación asintótica de f, y escribimos

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to \infty).$$

Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \geq b$, y $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ cuando $x \to \infty$, decimos que f es de orden menor que g, y escribimos

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to \infty).$$

Equivalentemente, $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to \infty$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe x_0, tal que para todo $x \geq x_0$,

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

SÍMBOLOS $\sim$, o Y O

Sean $f, g\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones.

Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \geq b$, y $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ cuando $x \to \infty$, decimos que g es una aproximación asintótica de f, y escribimos

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to \infty).$$

Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \geq b$, y $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ cuando $x \to \infty$, decimos que f es de orden menor que g, y escribimos

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to \infty).$$

Equivalentemente, $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to \infty$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe x_0, tal que para todo $x \geq x_0$,

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

Si $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ es acotada, decimos que f es de orden no mayor que g, y escribimos

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to \infty).$$

SÍMBOLOS $\sim$, o Y O

Sean $f, g\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones.

Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \geq b$, y $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ cuando $x \to \infty$, decimos que g es una aproximación asintótica de f, y escribimos

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to \infty).$$

Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \geq b$, y $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ cuando $x \to \infty$, decimos que f es de orden menor que g, y escribimos

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to \infty).$$

Equivalentemente, $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to \infty$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe x_0, tal que para todo $x \geq x_0$,

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

Si $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ es acotada, decimos que f es de orden no mayor que g, y escribimos

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to \infty).$$

Equivalentemente, $f(x) = O(g(x))$ cuando $x \to \infty$, si existen $K > 0$ y $x_0 \geq 0$ tal que para todo $x \geq x_0$

$$|f(x)| \leq K|g(x)|.$$

SÍMBOLOS $\sim$, o Y O

Si $f \sim g$ entonces $f \neq o(g)$ y $f = O(g)$,

$$x^2 + 1000x + 10^{15} \sim x^2 \qquad (x \to \infty),$$
$$x^2 + 1000x + 10^{15} \neq o(x^2) \qquad (x \to \infty),$$
$$x^2 + 1000x + 10^{15} = O(x^2) \qquad (x \to \infty).$$

Símbolos $\sim$, o y O

Si $f \sim g$ entonces $f \neq o(g)$ y $f = O(g)$,

$$x^2 + 1000x + 10^{15} \sim x^2 \qquad (x \to \infty),$$
$$x^2 + 1000x + 10^{15} \neq o(x^2) \qquad (x \to \infty),$$
$$x^2 + 1000x + 10^{15} = O(x^2) \qquad (x \to \infty).$$

Si $f = o(g)$ entonces $f \not\sim g$ y $f = O(g)$,

$$\frac{1}{x} \not\sim 1 \qquad (x \to \infty),$$
$$\frac{1}{x} = o(1) \qquad (x \to \infty),$$
$$\frac{1}{x} = O(1) \qquad (x \to \infty).$$

SÍMBOLOS $\sim$, o Y O

Si $f \sim g$ entonces $f \neq o(g)$ y $f = O(g)$,

$$\begin{aligned} x^2 + 1000x + 10^{15} &\sim x^2 \qquad (x \to \infty), \\ x^2 + 1000x + 10^{15} &\neq o(x^2) \qquad (x \to \infty), \\ x^2 + 1000x + 10^{15} &= O(x^2) \qquad (x \to \infty). \end{aligned}$$

Si $f = o(g)$ entonces $f \not\sim g$ y $f = O(g)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &\not\sim 1 \qquad (x \to \infty), \\ \frac{1}{x} &= o(1) \qquad (x \to \infty), \\ \frac{1}{x} &= O(1) \qquad (x \to \infty). \end{aligned}$$

Si $f = O(g)$ entonces no necesariamente $f = o(g)$ o $f \sim g$,

$$\begin{aligned} \sin(x) &\not\sim 1 \qquad (x \to \infty), \\ \sin(x) &\neq o(1) \qquad (x \to \infty), \\ \sin(x) &= O(1) \qquad (x \to \infty). \end{aligned}$$

Símbolos $\sim$, o y O

Si $f \sim g$ entonces $f \neq o(g)$ y $f = O(g)$,

$$\begin{aligned} x^2 + 1000x + 10^{15} &\sim x^2 \qquad (x \to \infty), \\ x^2 + 1000x + 10^{15} &\neq o(x^2) \qquad (x \to \infty), \\ x^2 + 1000x + 10^{15} &= O(x^2) \qquad (x \to \infty). \end{aligned}$$

Si $f = o(g)$ entonces $f \not\sim g$ y $f = O(g)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &\not\sim 1 \qquad (x \to \infty), \\ \frac{1}{x} &= o(1) \qquad (x \to \infty), \\ \frac{1}{x} &= O(1) \qquad (x \to \infty). \end{aligned}$$

Si $f = O(g)$ entonces no necesariamente $f = o(g)$ o $f \sim g$,

$$\begin{aligned} \sin(x) &\not\sim 1 \qquad (x \to \infty), \\ \sin(x) &\neq o(1) \qquad (x \to \infty), \\ \sin(x) &= O(1) \qquad (x \to \infty). \end{aligned}$$

Notar que $\sin(x) = O(1)$ y $\cos(x) = O(1)$ pero claramente $\sin \neq \cos$.

Operaciones CON o Y O

Sean $f, g\colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones y $a, b \in \mathbb{R}$.

Operaciones con *o* y *O*

Sean $f, g\colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones y $a, b \in \mathbb{R}$.

Cuando $x \to \infty$ se cumplen las siguientes:

$$
\begin{aligned}
o(f) &= O(f),\\
o(f) + o(f) &= o(f),\\
O(f) + O(f) &= O(f),\\
O(f) + O(g) &= O(|f| + |g|),\\
O(f)O(g) &= O(fg),\\
O(f)o(g) &= o(fg),\\
O(o(f)) = o(O(f)) &= o(o(f)) = o(f).
\end{aligned}
$$

Operaciones con o y O

Sean $f, g\colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones y $a, b \in \mathbb{R}$.

Cuando $x \to \infty$ se cumplen las siguientes:

$$
\begin{aligned}
o(f) &= O(f), \\
o(f) + o(f) &= o(f), \\
O(f) + O(f) &= O(f), \\
O(f) + O(g) &= O(|f| + |g|), \\
O(f)O(g) &= O(fg), \\
O(f)o(g) &= o(fg), \\
O(o(f)) = o(O(f)) &= o(o(f)) = o(f).
\end{aligned}
$$

Cuidado, ya que en general $O(f) = o(f)$ puede ser falso. Por ejemplo:

$$x = O(x), \quad x \neq o(x).$$

Operaciones CON o Y O

Sean $f, g\colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones y $a, b \in \mathbb{R}$.

Cuando $x \to \infty$ se cumplen las siguientes:

$$\begin{aligned} o(f) &= O(f), \\ o(f) + o(f) &= o(f), \\ O(f) + O(f) &= O(f), \\ O(f) + O(g) &= O(|f| + |g|), \\ O(f)O(g) &= O(fg), \\ O(f)o(g) &= o(fg), \\ O(o(f)) = o(O(f)) &= o(o(f)) = o(f). \end{aligned}$$

Cuidado, ya que en general $O(f) = o(f)$ puede ser falso. Por ejemplo:

$$x = O(x), \quad x \neq o(x).$$

Nota: La escritura $O(f)$ y $o(f)$ suele denotar *clases* de funciones que cumplen con la definición ya mencionada.

Cola de una serie de potencias convergente

Si $x > 1$, entonces

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots ,$$

la serie es convergente para todo $x > 1$.

Cola de una serie de potencias convergente

Si $x > 1$, entonces
$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots,$$
la serie es convergente para todo $x > 1$.

En este caso tenemos
$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad (x \to \infty),$$
pues existe $K > 0$ y $x_0 > 1$, tal que para todo $x > x_0$,
$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{x^k} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^k} \leq 1 + \frac{1}{x} + K\frac{1}{x^2}.$$

Cola de una serie de potencias convergente

Si $x > 1$, entonces

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots\,,$$

la serie es convergente para todo $x > 1$.

En este caso tenemos

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad (x \to \infty),$$

pues existe $K > 0$ y $x_0 > 1$, tal que para todo $x > x_0$,

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{x^k} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^k} \leq 1 + \frac{1}{x} + K\frac{1}{x^2}.$$

En general, para todo n

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \cdots + \frac{1}{x^n} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \qquad (x \to \infty).$$

Cola de una serie de potencias convergente

Si $x > 1$, entonces

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots ,$$

la serie es convergente para todo $x > 1$.

En este caso tenemos

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad (x \to \infty),$$

pues existe $K > 0$ y $x_0 > 1$, tal que para todo $x > x_0$,

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{x^k} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^k} \leq 1 + \frac{1}{x} + K\frac{1}{x^2}.$$

En general, para todo n

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \cdots + \frac{1}{x^n} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \qquad (x \to \infty).$$

Lo anterior se puede interpretar como

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} - \left(1 + \frac{1}{x} + \cdots + \frac{1}{x^n}\right) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \qquad (x \to \infty).$$

EJEMPLO: FUNCIÓN INTEGRAL EXPONENCIAL Y SU SERIE CONVERGENTE

Consideremos la función integral exponencial

$$E(x) := \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy \qquad (x > 0).$$

Ejemplo: Función integral exponencial y su serie convergente

Consideremos la función integral exponencial

$$E(x) := \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy \qquad (x > 0).$$

Para E es posible calcular la siguiente expansión

$$E(x) = -\gamma - \ln(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!k},$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni, $\gamma = 0.57721566\ldots$.

Ejemplo: Función integral exponencial y su serie convergente

Consideremos la función integral exponencial

$$E(x) := \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy \qquad (x > 0).$$

Para E es posible calcular la siguiente expansión

$$E(x) = -\gamma - \ln(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!k},$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni, $\gamma = 0.57721566\ldots$.

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!k}$$

es convergente para cualquier valor x.

EXPERIMENTOS NUMÉRICOS DE LA SERIE CONVERGENTE

Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$g_n(x) := -\gamma - \ln(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!k}.$$

Experimentos numéricos de la serie convergente

Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$g_n(x) := -\gamma - \ln(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!k}.$$

Tabla. Valores aproximados de la función E utilizando las expansiones g_n, los resultados se escribieron con a lo más 6 cifras exactas.

x	$g_5(x)$	$g_{10}(x)$	$g_{50}(x)$	$g_{100}(x)$	$E(x)$
$1/2$	0.5597770	0.5597736	0.5597736	0.5597736	0.5597736
10	100.1758	-127.2596	4.156969×10^{-6}	4.156969×10^{-6}	4.156969×10^{-6}
20	4.03×10^{3}	-1.79×10^{5}	-2.063946×10^{-2}	9.835525×10^{-11}	9.835525×10^{-11}
40	1.47×10^{5}	-2.25×10^{8}	-3.64×10^{13}	-4.859550×10^{-1}	1.036773×10^{-19}
100	1.57×10^{7}	-2.48×10^{12}	-4.34×10^{33}	-5.32×10^{39}	3.683598×10^{-46}

Experimentos numéricos de la serie convergente

Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$g_n(x) := -\gamma - \ln(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!k}.$$

Tabla. Valores aproximados de la función E utilizando las expansiones g_n, los resultados se escribieron con a lo más 6 cifras exactas.

x	$g_5(x)$	$g_{10}(x)$	$g_{50}(x)$	$g_{100}(x)$	$E(x)$
$1/2$	0.5597770	0.5597736	0.5597736	0.5597736	0.5597736
10	100.1758	-127.2596	4.156969×10^{-6}	4.156969×10^{-6}	4.156969×10^{-6}
20	4.03×10^{3}	-1.79×10^{5}	-2.063946×10^{-2}	9.835525×10^{-11}	9.835525×10^{-11}
40	1.47×10^{5}	-2.25×10^{8}	-3.64×10^{13}	-4.859550×10^{-1}	1.036773×10^{-19}
100	1.57×10^{7}	-2.48×10^{12}	-4.34×10^{33}	-5.32×10^{39}	3.683598×10^{-46}

Es posible aproximar de manera numérica $E(x)$ para cualquier x con la precisión deseada.
Sin embargo, si tomamos valores grandes de x es necesario considerar muchos términos de la serie.

Más aún, si fijamos n la precisión de nuestra aproximación se pierde a medida que aumentamos x.

Serie divergente de la función integral exponencial

Serie divergente de la función integral exponencial

Usando integración por partes sobre $E(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy$ obtenemos

$$E(x) = \frac{e^{-x}}{x} + \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^2} dy.$$

Serie divergente de la función integral exponencial

Usando integración por partes sobre $E(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy$ obtenemos

$$E(x) = \frac{e^{-x}}{x} + \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^2} dy.$$

Repitiendo integración por partes n veces se obtiene

$$E(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right) + (-1)^n n! \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{n+1}} dy.$$

SERIE DIVERGENTE DE LA FUNCIÓN INTEGRAL EXPONENCIAL

Usando integración por partes sobre $E(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy$ obtenemos

$$E(x) = \frac{e^{-x}}{x} + \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^2} dy.$$

Repitiendo integración por partes n veces se obtiene

$$E(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \right) + (-1)^n n! \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{n+1}} dy.$$

En este caso

$$(-1)^n n! \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{n+1}} dy = o\left(\frac{e^{-x}}{x^n} \right) \qquad (x \to \infty).$$

Serie divergente de la función integral exponencial

Usando integración por partes sobre $E(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy$ obtenemos

$$E(x) = \frac{e^{-x}}{x} + \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^2} dy.$$

Repitiendo integración por partes n veces se obtiene

$$E(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right) + (-1)^n n! \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{n+1}} dy.$$

En este caso

$$(-1)^n n! \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{n+1}} dy = o\left(\frac{e^{-x}}{x^n}\right) \qquad (x \to \infty).$$

En otras palabras

$$E(x) - e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right) = o\left(\frac{e^{-x}}{x^n}\right) \qquad (x \to \infty).$$

Serie divergente de la función integral exponencial

Usando integración por partes sobre $E(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy$ obtenemos

$$E(x) = \frac{e^{-x}}{x} + \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^2} dy.$$

Repitiendo integración por partes n veces se obtiene

$$E(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right) + (-1)^n n! \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{n+1}} dy.$$

En este caso

$$(-1)^n n! \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{n+1}} dy = o\left(\frac{e^{-x}}{x^n}\right) \qquad (x \to \infty).$$

En otras palabras

$$E(x) - e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right) = o\left(\frac{e^{-x}}{x^n}\right) \qquad (x \to \infty).$$

Más la serie

$$\frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \cdots$$

es divergente para todo $x > 0$.

Experimentos numéricos de la serie divergente

Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$u_n(x) := e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right).$$

Experimentos numéricos de la serie divergente

Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$u_n(x) := e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right).$$

Tabla. Valores aproximados de la función E utlizando las expansiones u_n, los resultados se escribieron con a lo más 6 cifras exactas.

x	$u_1(x)$	$u_5(x)$	$u_{10}(x)$	$u_{100}(x)$	$E(x)$
$1/2$	1.213061	416.08	-2.14×10^{8}	-7.14×10^{185}	5.597736×10^{-1}
2	6.766764×10^{-2}	1.184184×10^{-1}	-39.34	-9.77×10^{124}	4.890051×10^{-2}
10	4.539993×10^{-6}	4.160450×10^{-6}	4.156165×10^{-6}	-3.85×10^{51}	4.156969×10^{-6}
20	1.030577×10^{-10}	9.835830×10^{-11}	9.835523×10^{-11}	-1.26×10^{17}	9.835525×10^{-11}
30	3.119208×10^{-15}	3.021565×10^{-15}	3.021552×10^{-15}	-1.301148×10^{-5}	3.021552×10^{-15}
40	1.062089×10^{-15}	1.036774×10^{-19}	1.036773×10^{-19}	1.035014×10^{-19}	1.036773×10^{-19}
50	3.857500×10^{-24}	3.783265×10^{-24}	3.783264×10^{-24}	3.783264×10^{-24}	3.783264×10^{-24}

Experimentos numéricos de la serie divergente

Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$u_n(x) := e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right).$$

Tabla. Valores aproximados de la función E utlizando las expansiones u_n, los resultados se escribieron con a lo más 6 cifras exactas.

x	$u_1(x)$	$u_5(x)$	$u_{10}(x)$	$u_{100}(x)$	$E(x)$
$1/2$	1.213061	416.08	-2.14×10^{8}	-7.14×10^{185}	5.597736×10^{-1}
2	6.766764×10^{-2}	1.184184×10^{-1}	-39.34	-9.77×10^{124}	4.890051×10^{-2}
10	4.539993×10^{-6}	4.160450×10^{-6}	4.156165×10^{-6}	-3.85×10^{51}	4.156969×10^{-6}
20	1.030577×10^{-10}	9.835830×10^{-11}	9.835523×10^{-11}	-1.26×10^{17}	9.835525×10^{-11}
30	3.119208×10^{-15}	3.021565×10^{-15}	3.021552×10^{-15}	-1.301148×10^{-5}	3.021552×10^{-15}
40	1.062089×10^{-15}	1.036774×10^{-19}	1.036773×10^{-19}	1.035014×10^{-19}	1.036773×10^{-19}
50	3.857500×10^{-24}	3.783265×10^{-24}	3.783264×10^{-24}	3.783264×10^{-24}	3.783264×10^{-24}

Para obtener una buena aproximación de $E(x)$ con valores de x grandes, no es necesario tomar muchos términos en la expansión.

Sin embargo, si fijamos x y tomamos valores de n muy grandes, entonces la aproximación $u_n(x)$ será muy mala, esto se debe a que la serie *asintótica* asociada diverge.

Expansiones Asintóticas

Sean u_0, u_1, u_2, . . ., una sucesión de funciones que satisfacen

$$u_1(x) = o(u_0(x)), \quad u_2(x) = o(u_1(x)), \quad \ldots \quad u_{n+1}(x) = o(u_n(x)), \quad \ldots \quad (x \to \infty),$$

y sean c_0, c_1, c_2, . . ., una sucesión de números reales.

Expansiones Asintóticas

Sean $u_0, u_1, u_2, \ldots$, una sucesión de funciones que satisfacen

$$u_1(x) = o(u_0(x)), \quad u_2(x) = o(u_1(x)), \quad \ldots \quad u_{n+1}(x) = o(u_n(x)), \quad \ldots \quad (x \to \infty),$$

y sean $c_0, c_1, c_2, \ldots$, una sucesión de números reales.
Si

$$\begin{aligned}
f(x) &= o(u_0(x)) \qquad (x \to \infty), \\
f(x) &= c_0 u_0(x) + o(u_1(x)) \qquad (x \to \infty), \\
f(x) &= c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) + o(u_2(x)) \qquad (x \to \infty), \\
f(x) &= c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots + c_n u_n(x) + o(u_{n+1}(x)) \qquad (x \to \infty).
\end{aligned}$$

Entonces se dice que la expresión

$$c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots$$

es una serie o expansión asintótica para f cuando $x \to \infty$, y escribimos

$$f(x) \approx c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x) \qquad (x \to \infty).$$

Serie convergente vs expansiones asintóticas

Si $f\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función que tiene una representación como serie convergente:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x).$$

Entonces para cada $x > a$ **fijo**, a medida que eumentamos el valor N, las sumas parciales

$$g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \psi_n(x)$$

mejoran la aproximación del valor $f(x)$.

Sin embargo, puede ser que la convergencia sea muy lenta para valores muy grandes de x.

SERIE CONVERGENTE VS EXPANSIONES ASINTÓTICAS

Por el otro lado si f tiene una representación asintótica:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x) \qquad (x \to \infty),$$

la serie asintótica puede diverger y por lo tanto su nivel de precisión está limitado para cada x, es decir, las sumas parciales

$$u_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \phi_n(x),$$

en general no convergen a $f(x)$.

Aunque, para N **fijo**, al tomar valores de x suficientemente grandes, la aproximación $u_N(x)$ del valor $f(x)$ ¡suele ser muy buena!

Parte 2: Aplicación

Consideremos la ecuación

$$\tan(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Parte 2: Aplicación

Consideremos la ecuación

$$\tan(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ya que $\tan(x)$ es una función periódica, hay una cantidad numerable de soluciones a la ecuación $\tan(x) = x$. Estas las denotaremos por x_n con $n \in \mathbb{Z}$.

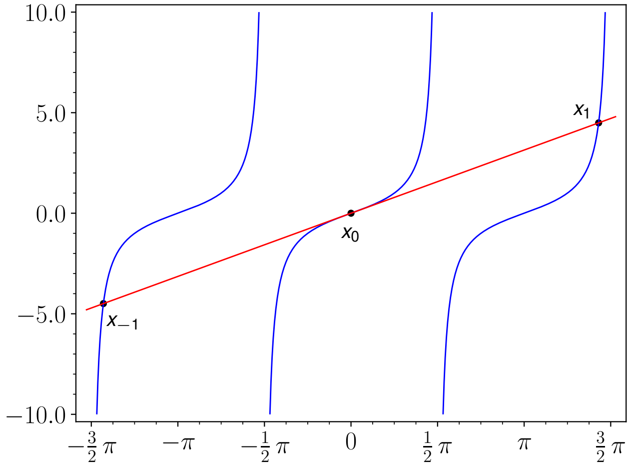

Figura. La función $\tan(x)$ en azul, la función x en rojo y las soluciones x_n de la ecuación $\tan(x) = x$ en negro.

ANÁLISIS DE PROBLEMA

¿ Cuál es el comportamiento asintótico de x_n cuando $n \to \infty$?

ANÁLISIS DE PROBLEMA

¿ Cuál es el comportamiento asintótico de x_n cuando $n \to \infty$?

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_n = \left((n - \tfrac{1}{2})\pi, (n + \tfrac{1}{2})\pi \right).$$

Así, tenemos que en cada I_n hay un único punto x_n tal que $\mathtt{tan}(x_n) = x_n$.

Análisis de problema

¿ Cuál es el comportamiento asintótico de x_n cuando $n \to \infty$?

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_n = \left((n - \tfrac{1}{2})\pi, (n + \tfrac{1}{2})\pi \right).$$

Así, tenemos que en cada I_n hay un único punto x_n tal que $\tan(x_n) = x_n$.

- Para $x \in I_n$, tenemos que $\tan(x) = \tan(x - n\pi)$. Por tanto, estudiar la ecuación $\tan(x) = x$ es equivalente a estudiar la ecuación $x = \arctan(x) + n\pi$.

Análisis de problema

¿ Cuál es el comportamiento asintótico de x_n cuando $n \to \infty$?

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_n = \left((n - \tfrac{1}{2})\pi, (n + \tfrac{1}{2})\pi \right).$$

Así, tenemos que en cada I_n hay un único punto x_n tal que $\tan(x_n) = x_n$.

- Para $x \in I_n$, tenemos que $\tan(x) = \tan(x - n\pi)$. Por tanto, estudiar la ecuación $\tan(x) = x$ es equivalente a estudiar la ecuación $x = \arctan(x) + n\pi$.
- Para $x > 0$, $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

¿ Cuál es el comportamiento asintótico de x_n cuando $n \to \infty$?

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_n = \left((n - \tfrac{1}{2})\pi, (n + \tfrac{1}{2})\pi \right).$$

Así, tenemos que en cada I_n hay un único punto x_n tal que $\tan(x_n) = x_n$.

- Para $x \in I_n$, tenemos que $\tan(x) = \tan(x - n\pi)$. Por tanto, estudiar la ecuación $\tan(x) = x$ es equivalente a estudiar la ecuación $x = \arctan(x) + n\pi$.
- Para $x > 0$, $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Así, se sigue que hay un único punto x_n en I_n para el cual

$$\tan(x_n) = x_n \qquad \text{si y solo si} \qquad x_n = (n + \tfrac{1}{2})\pi - \arctan\left(\tfrac{1}{x_n}\right).$$

ANÁLISIS DE PROBLEMA

¿ Cuál es el comportamiento asintótico de x_n cuando $n \to \infty$?

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_n = \left((n - \tfrac{1}{2})\pi, (n + \tfrac{1}{2})\pi \right).$$

Así, tenemos que en cada I_n hay un único punto x_n tal que $\tan(x_n) = x_n$.

- Para $x \in I_n$, tenemos que $\tan(x) = \tan(x - n\pi)$. Por tanto, estudiar la ecuación $\tan(x) = x$ es equivalente a estudiar la ecuación $x = \arctan(x) + n\pi$.
- Para $x > 0$, $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Así, se sigue que hay un único punto x_n en I_n para el cual

$$\tan(x_n) = x_n \qquad \text{si y solo si} \qquad x_n = (n + \tfrac{1}{2})\pi - \arctan\left(\tfrac{1}{x_n}\right).$$

Ya que $\arctan(x)$ es una función acotada, tenemos que $x_n \sim \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ cuando $n \to \infty$.

ANÁLISIS DE PROBLEMA

¿ Cuál es el comportamiento asintótico de x_n cuando $n \to \infty$?

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$I_n = \left((n - \tfrac{1}{2})\pi, (n + \tfrac{1}{2})\pi \right).$$

Así, tenemos que en cada I_n hay un único punto x_n tal que $\tan(x_n) = x_n$.

- Para $x \in I_n$, tenemos que $\tan(x) = \tan(x - n\pi)$. Por tanto, estudiar la ecuación $\tan(x) = x$ es equivalente a estudiar la ecuación $x = \arctan(x) + n\pi$.
- Para $x > 0$, $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Así, se sigue que hay un único punto x_n en I_n para el cual

$$\tan(x_n) = x_n \qquad \text{si y solo si} \qquad x_n = (n + \tfrac{1}{2})\pi - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right).$$

Ya que $\arctan(x)$ es una función acotada, tenemos que $x_n \sim (n + \frac{1}{2})\pi$ cuando $n \to \infty$. Es decir, $(n + \frac{1}{2})\pi$ es nuestro término líder en nuestra expansión asintótica.

TÉRMINO LÍDER

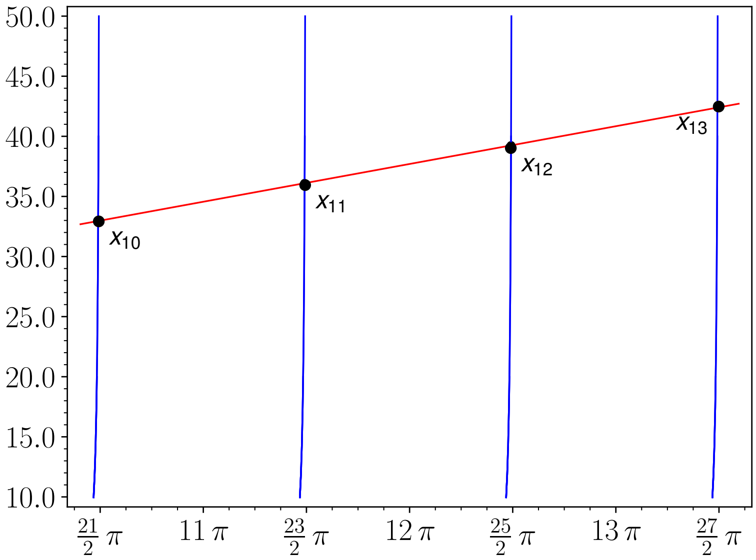

Figura. La función $\tan(x)$ en azul, la función x en rojo y las soluciones x_n de la ecuación $\tan(x) = x$ en negro.

Primera iteración

Usando la expansión de Taylor, sabemos que

$$\arctan(x) = O(x), \quad x \to 0.$$

Primera iteración

Usando la expansión de Taylor, sabemos que

$$\arctan(x) = O(x), \quad x \to 0.$$

Por tanto,

$$\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = O\left(\frac{1}{x_n}\right), \quad n \to \infty.$$

Primera iteración

Usando la expansión de Taylor, sabemos que

$$\arctan(x) = O(x), \quad x \to 0.$$

Por tanto,

$$\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = O\left(\frac{1}{x_n}\right), \quad n \to \infty.$$

Sin embargo,

$$x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\big(1 + o(1)\big) = O(n), \quad n \to \infty.$$

Primera iteración

Usando la expansión de Taylor, sabemos que

$$\arctan(x) = O(x), \quad x \to 0.$$

Por tanto,

$$\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = O\left(\frac{1}{x_n}\right), \quad n \to \infty.$$

Sin embargo,

$$x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\big(1 + o(1)\big) = O(n), \quad n \to \infty.$$

Entonces,

$$\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Primera iteración

Usando la expansión de Taylor, sabemos que

$$\arctan(x) = O(x), \quad x \to 0.$$

Por tanto,

$$\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = O\left(\frac{1}{x_n}\right), \quad n \to \infty.$$

Sin embargo,

$$x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi(1 + o(1)) = O(n), \quad n \to \infty.$$

Entonces,

$$\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Así, tenemos que

$$x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

Primera iteración

Usando la expansión de Taylor, sabemos que

$$\arctan(x) = O(x), \quad x \to 0.$$

Por tanto,

$$\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = O\left(\frac{1}{x_n}\right), \quad n \to \infty.$$

Sin embargo,

$$x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\big(1 + o(1)\big) = O(n), \quad n \to \infty.$$

Entonces,

$$\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Así, tenemos que

$$x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

SEGUNDA ITERACIÓN

Tomemos un término más de Taylor:

$$\arctan(x) = x + O(x^3), \quad x \to 0.$$

Segunda iteración

Tomemos un término más de Taylor:

$$\arctan(x) = x + O(x^3), \quad x \to 0.$$

Definimos

$$\mu_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

De la primera iteración tenemos que $x_n = \mu_n + O(\frac{1}{n})$ cuando $n \to \infty$.

Segunda iteración

Tomemos un término más de Taylor:

$$\arctan(x) = x + O(x^3), \quad x \to 0.$$

Definimos

$$\mu_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

De la primera iteración tenemos que $x_n = \mu_n + O(\frac{1}{n})$ cuando $n \to \infty$. Así,

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) &= \frac{1}{\mu_n + O(\frac{1}{n})} + O\left(\frac{1}{\mu_n + O(\frac{1}{n})}\right)^3 \\
&= \frac{1}{\mu_n}\left(\frac{1}{1 + O(\frac{1}{n^2})}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{1}{\mu_n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Segunda iteración

Tomemos un término más de Taylor:

$$\arctan(x) = x + O(x^3), \quad x \to 0.$$

Definimos

$$\mu_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

De la primera iteración tenemos que $x_n = \mu_n + O(\frac{1}{n})$ cuando $n \to \infty$. Así,

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) &= \frac{1}{\mu_n + O(\frac{1}{n})} + O\left(\frac{1}{\mu_n + O(\frac{1}{n})}\right)^3 \\
&= \frac{1}{\mu_n}\left(\frac{1}{1 + O(\frac{1}{n^2})}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{1}{\mu_n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$x_n = \mu_n - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

Segunda iteración

Tomemos un término más de Taylor:

$$\arctan(x) = x + O(x^3), \quad x \to 0.$$

Definimos

$$\mu_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

De la primera iteración tenemos que $x_n = \mu_n + O(\frac{1}{n})$ cuando $n \to \infty$. Así,

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) &= \frac{1}{\mu_n + O(\frac{1}{n})} + O\left(\frac{1}{\mu_n + O(\frac{1}{n})}\right)^3 \\
&= \frac{1}{\mu_n}\left(\frac{1}{1 + O(\frac{1}{n^2})}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{1}{\mu_n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$x_n = \mu_n - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = \mu_n - \frac{1}{\mu_n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \to \infty.$$

M-ÉSIMA ITERACIÓN:

Podemos hacer este procedimiento varias veces y obtener una secuencia de aproximaciones de x_n con errores de orden asintótico decreciente.

M-ÉSIMA ITERACIÓN:

Podemos hacer este procedimiento varias veces y obtener una secuencia de aproximaciones de x_n con errores de orden asintótico decreciente.

Supongamos que conocemos la m-ésima iteración de x_n

$$x_n = \mu_n + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{\mu_n^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2m-1}}\right), \quad a_k \in \mathbb{R},\ n \to \infty.$$

M-ÉSIMA ITERACIÓN:

Podemos hacer este procedimiento varias veces y obtener una secuencia de aproximaciones de x_n con errores de orden asintótico decreciente.

Supongamos que conocemos la m-ésima iteración de x_n

$$x_n = \mu_n + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{\mu_n^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2m-1}}\right), \quad a_k \in \mathbb{R},\ n \to \infty.$$

Para encontrar la $(m+1)$-ésima iteración necesitamos hacer los siguientes pasos:

M-ÉSIMA ITERACIÓN:

Podemos hacer este procedimiento varias veces y obtener una secuencia de aproximaciones de x_n con errores de orden asintótico decreciente.

Supongamos que conocemos la m-ésima iteración de x_n

$$x_n = \mu_n + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{\mu_n^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2m-1}}\right), \quad a_k \in \mathbb{R},\ n \to \infty.$$

Para encontrar la $(m+1)$-ésima iteración necesitamos hacer los siguientes pasos:

1. Tomar un término más de la expansión de Taylor de la función $\arctan(x)$ cuando $x \to 0$.

M-ÉSIMA ITERACIÓN:

Podemos hacer este procedimiento varias veces y obtener una secuencia de aproximaciones de x_n con errores de orden asintótico decreciente.

Supongamos que conocemos la m-ésima iteración de x_n

$$x_n = \mu_n + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{\mu_n^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2m-1}}\right), \quad a_k \in \mathbb{R},\ n \to \infty.$$

Para encontrar la $(m+1)$-ésima iteración necesitamos hacer los siguientes pasos:

1. Tomar un término más de la expansión de Taylor de la función $\arctan(x)$ cuando $x \to 0$.
2. Sustituir x por la m-ésima iteración de x_n en la expansión de Taylor.

M-ÉSIMA ITERACIÓN:

Podemos hacer este procedimiento varias veces y obtener una secuencia de aproximaciones de x_n con errores de orden asintótico decreciente.

Supongamos que conocemos la m-ésima iteración de x_n

$$x_n = \mu_n + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{\mu_n^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2m-1}}\right), \quad a_k \in \mathbb{R}, \ n \to \infty.$$

Para encontrar la $(m+1)$-ésima iteración necesitamos hacer los siguientes pasos:

1. Tomar un término más de la expansión de Taylor de la función $\arctan(x)$ cuando $x \to 0$.
2. Sustituir x por la m-ésima iteración de x_n en la expansión de Taylor.
3. Remplazar el resultado del paso anterior en $x_n = \mu_n - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

M-ÉSIMA ITERACIÓN:

Podemos hacer este procedimiento varias veces y obtener una secuencia de aproximaciones de x_n con errores de orden asintótico decreciente.

Supongamos que conocemos la m-ésima iteración de x_n

$$x_n = \mu_n + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{\mu_n^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2m-1}}\right), \quad a_k \in \mathbb{R},\ n \to \infty.$$

Para encontrar la $(m+1)$-ésima iteración necesitamos hacer los siguientes pasos:

1. Tomar un término más de la expansión de Taylor de la función $\arctan(x)$ cuando $x \to 0$.
2. Sustituir x por la m-ésima iteración de x_n en la expansión de Taylor.
3. Remplazar el resultado del paso anterior en $x_n = \mu_n - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

Por ejemplo, siguiendo estos pasos tenemos la tercera iteración

$$x_n = \mu_n - \frac{1}{\mu_n} - \frac{2}{3\mu_n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

M-ÉSIMA ITERACIÓN:

Podemos hacer este procedimiento varias veces y obtener una secuencia de aproximaciones de x_n con errores de orden asintótico decreciente.

Supongamos que conocemos la m-ésima iteración de x_n

$$x_n = \mu_n + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{\mu_n^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2m-1}}\right), \quad a_k \in \mathbb{R}, \ n \to \infty.$$

Para encontrar la $(m+1)$-ésima iteración necesitamos hacer los siguientes pasos:

1. Tomar un término más de la expansión de Taylor de la función $\arctan(x)$ cuando $x \to 0$.
2. Sustituir x por la m-ésima iteración de x_n en la expansión de Taylor.
3. Remplazar el resultado del paso anterior en $x_n = \mu_n - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

Por ejemplo, siguiendo estos pasos tenemos la tercera iteración

$$x_n = \mu_n - \frac{1}{\mu_n} - \frac{2}{3\mu_n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

El análisis no permite discernir si la secuencia converge a medida que el número de pasos tiende a infinito. Sin embargo, el potencial numérico del proceso puede percibirse.

EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Recordemos que $\mu_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$. Denotamos por x_n a la solución de $\mathtt{tan}(x_n) = x_n$ obtenida numéricamente con el comando find_root en SageMath.

EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Recordemos que $\mu_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$. Denotamos por x_n a la solución de $\mathtt{tan}(x_n) = x_n$ obtenida numéricamente con el comando find_root en SageMath.

Considere las primeras tres aproximaciones de x_n junto con sus respectivos errores absolutos:

$$x_n^{(1)} = \mu_n, \qquad \varepsilon_n^{(1)} = |x_n - x_n^{(1)}|,$$

$$x_n^{(2)} = \mu_n - \frac{1}{\mu_n}, \qquad \varepsilon_n^{(2)} = |x_n - x_n^{(2)}|,$$

$$x_n^{(3)} = \mu_n - \frac{1}{\mu_n} - \frac{2}{3\mu_n}, \qquad \varepsilon_n^{(3)} = |x_n - x_n^{(3)}|.$$

Experimentos numéricos

Recordemos que $\mu_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$. Denotamos por x_n a la solución de $\tan(x_n) = x_n$ obtenida numéricamente con el comando find_root en SageMath.

Considere las primeras tres aproximaciones de x_n junto con sus respectivos errores absolutos:

$$
\begin{aligned}
x_n^{(1)} &= \mu_n, & \varepsilon_n^{(1)} &= |x_n - x_n^{(1)}|, \\
x_n^{(2)} &= \mu_n - \frac{1}{\mu_n}, & \varepsilon_n^{(2)} &= |x_n - x_n^{(2)}|, \\
x_n^{(3)} &= \mu_n - \frac{1}{\mu_n} - \frac{2}{3\mu_n}, & \varepsilon_n^{(3)} &= |x_n - x_n^{(3)}|.
\end{aligned}
$$

Tabla. Errores absolutos para diferentes valores de n.

n	ε_1	ε_2	ε_3
64	4.935×10^{-3}	8.012×10^{-8}	2.557×10^{-12}
256	1.249×10^{-3}	1.296×10^{-6}	0.0
1024	3.106×10^{-4}	2.001×10^{-11}	0.0
2048	1.553×10^{-4}	4.547×10^{-12}	0.0

Experimentos numéricos

Recordemos que $\mu_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$. Denotamos por x_n a la solución de $\tan(x_n) = x_n$ obtenida numéricamente con el comando find_root en SageMath.

Considere las primeras tres aproximaciones de x_n junto con sus respectivos errores absolutos:

$$
\begin{aligned}
x_n^{(1)} &= \mu_n, & \varepsilon_n^{(1)} &= |x_n - x_n^{(1)}|,\\
x_n^{(2)} &= \mu_n - \frac{1}{\mu_n}, & \varepsilon_n^{(2)} &= |x_n - x_n^{(2)}|,\\
x_n^{(3)} &= \mu_n - \frac{1}{\mu_n} - \frac{2}{3\mu_n}, & \varepsilon_n^{(3)} &= |x_n - x_n^{(3)}|.
\end{aligned}
$$

Tabla. Errores absolutos para diferentes valores de n.

n	ε_1	ε_2	ε_3
64	4.935×10^{-3}	8.012×10^{-8}	2.557×10^{-12}
256	1.249×10^{-3}	1.296×10^{-6}	0.0
1024	3.106×10^{-4}	2.001×10^{-11}	0.0
2048	1.553×10^{-4}	4.547×10^{-12}	0.0

Nuestras iteraciónes asintóticas nos permiten tomar la cantidad de cifras significativas que necesitemos. Sin embargo, el commando find_root trabaja con 15 digitos de presición (64 bits).

EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Repetiremos el anterior experimento, pero ahora calcularemos a x_n con el método de la bisección.

Experimentos Numéricos

Repetiremos el anterior experimento, pero ahora calcularemos a x_n con el método de la bisección.

Los valores $x_n,\ x_n^{(1)},\ x_n^{(2)},\ x_n^{(3)}$ seran trabajados con 1000 digitos de presición (3322 bits). Adicionalmente, consideraremos el error relativo y el error normalizado para cada aproximación como:

$$R\varepsilon_n^{(1)} = \frac{\varepsilon_n^{(2)}}{\varepsilon_n^{(1)}}, \qquad N\varepsilon_n^{(1)} = n^2\ R\varepsilon_n^{(1)},$$

$$R\varepsilon_n^{(2)} = \frac{\varepsilon_n^{(3)}}{\varepsilon_n^{(1)}}, \qquad N\varepsilon_n^{(2)} = n^3\ R\varepsilon_n^{(3)},$$

Experimentos Numéricos

Repetiremos el anterior experimento, pero ahora calcularemos a x_n con el método de la bisección.

Los valores $x_n,\ x_n^{(1)},\ x_n^{(2)},\ x_n^{(3)}$ seran trabajados con 1000 digitos de presición (3322 bits).
Adicionalmente, consideraremos el error relativo y el error normalizado para cada aproximación como:

$$R\varepsilon_n^{(1)} = \frac{\varepsilon_n^{(2)}}{\varepsilon_n^{(1)}}, \qquad N\varepsilon_n^{(1)} = n^2\ R\varepsilon_n^{(1)},$$

$$R\varepsilon_n^{(2)} = \frac{\varepsilon_n^{(3)}}{\varepsilon_n^{(1)}}, \qquad N\varepsilon_n^{(2)} = n^3\ R\varepsilon_n^{(3)},$$

Tabla. Errores relativos y normales para diferentes valores de n.

n	$R\varepsilon_1$	$N\varepsilon_1$	$R\varepsilon_2$	$N\varepsilon_1$
64	1.623×10^{-5}	0.0665	5.140×10^{-10}	1.347×10^{-4}
256	1.026×10^{-6}	0.0672	1.110×10^{-12}	3.541×10^{-5}
1024	6.435×10^{-8}	0.0674	1.344×10^{-14}	1.443×10^{-5}
2048	1.609×10^{-8}	0.0675	1.293×10^{-15}	1.110×10^{-5}

Referencias

- Olver F. W. J.: Asymptotics and special functions, Academic Press, 1st ed., 1974, New York.
- de Bruijn, N.G.: Asymptotic methods in analysis. Amsterdam: North-Holland, 2nd ed., 1961, New York.
- Estrada R., Kanwal R. P.: A Distributional Approach to Asymptotics, Birkhäuser Boston, 2nd ed., 2002, Boston, Ma.