Formas diferenciales alternantes y aplicaciones al análisis vectorial

Enrique Ramírez de Arellano

Escuela de Verano

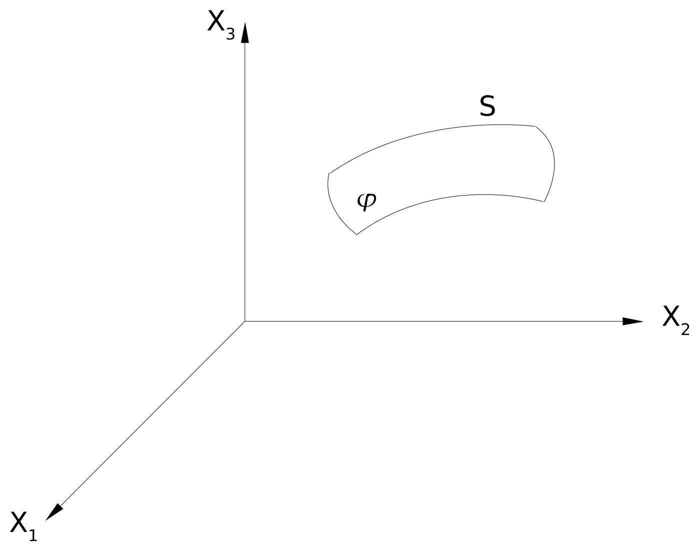
Departamento de Matemáticas

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Variaciones sobre el Teorema Fundamental del Cálculo.

Hablaremos sobre una de las fórmulas mas importantes del análisis: El teorema generalizado de Stokes.

$$\boxed{\int_S d\varphi = \int_{\partial S} \varphi}$$



φ es una forma diferencial de grado 1 sobre $\mathcal{S}$,

$d\varphi$ es la diferencial de φ y tiene grado 2.

$\mathcal{S}$ es una superficie de dim 2 en $\mathbb{R}^3$

$\partial\mathcal{S}$ es la frontera de S y tiene dim 1.

Esta fórmula es una generalización del teorema fundamental del cálculo:

$$\int_I f(x)dx = \int_I F'(x)dx = \int_I dF = F(b) - F(a) =: \int_{\partial I} F,$$

donde $dF = F'dx, F$ es la "primitiva" o "antiderivada" de f,

$I = [a, b]$. En este caso F corresponde a φ e I a $\mathcal{S}$

La herramienta fundamental para la generalización mencionada es la fórmula para el cambio de variable en integrales:

En una variable, si $x = \varphi(t),\ t \in [\alpha, \beta] = I$ y

$a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta),\ J = \varphi(I)$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ \int_{\varphi(I)} f(x)dx &= \int_I (f \circ \varphi)(t) \underbrace{\varphi'(t)dt}_{dx}. \end{aligned}$$

En dos variables sea Φ un cambio de coordenadas o cambio de variables, p. ej. de coord. polares a coord. cartesianas, esto es:

$$\left.\begin{aligned} x = r\cos\theta &= \varphi_1(r, \theta) \\ y = r\mathrm{sen}\theta &= \varphi_2(r, \theta) \end{aligned}\right\} \Phi = (\varphi_1, \varphi_2) : (r, \theta) \to (x, y)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Phi(A)} F(x, y)dxdy &\overset{?}{=} \int_A F(\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta))d\varphi_1(r, \theta) \odot d\varphi_2(r, \theta) \\ &= \int_A (F \circ \Phi)(r, \theta) \underbrace{d\Phi}_{?}(r, \theta) \end{aligned}$$

Por cálculo integral de dos variables sabemos

$$\int_{\Phi(A)} F(x,y)dxdy = \int_A (F\circ\Phi)(r,\theta)|J_\Phi(r,\theta)|drd\theta$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} \end{vmatrix}(r,\theta)drd\theta = J_\Phi(r,\theta)drd\theta$$

En lugar de $dxdy$ debe ponerse $rdrd\theta$

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}dr + \frac{\partial\varphi_1}{d\theta}d\theta = \cos\theta dr - r\mathrm{sen}\theta d\theta \\ dy &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial r}dr + \frac{\partial\varphi_2}{d\theta}d\theta = \mathrm{sen}\theta dr + \cos\theta d\theta \end{aligned}$$

$$dxdy \rightsquigarrow |J_\Phi(r,\theta)|drd\theta$$

Se introduce el producto "cuña" de diferenciales que hereda las propiedades de multiplicación de los determinantes:

$$\begin{aligned} dx\wedge dy &= (\cos\theta dr - r\mathrm{sen}\theta d\theta)\wedge(\mathrm{sen}\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\ &= (\cos\theta dr)\wedge(\mathrm{sen}\theta dr) + (\cos\theta dr)\wedge(r\cos\theta d\theta) \\ &+ (-r\mathrm{sen}\theta d\theta)\wedge(\mathrm{sen}\theta dr) + (-r\mathrm{sen}\theta d\theta)\wedge(r\cos\theta d\theta) \end{aligned}$$

con $\wedge$ distributivo respecto a $+$ y $-$ y además anticonmutativo, como con las columnas o los renglones en los determinantes:

$$dr\wedge d\theta = -d\theta\wedge dr, \quad dr\wedge dr = 0, \quad d\theta\wedge d\theta = 0$$

y por lo tanto

$$dx \wedge dy = r\cos^2\theta dr \wedge d\theta - r\text{sen}^2\theta d\theta \wedge dr = rdr \wedge d\theta$$

Estas reglas pueden extenderse a dimensiones superiores definiendo k-formas-diferenciales mediante sus "componentes". Si $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $C(A)$ el conjunto de todas las funciones (diferenciables) sobre A, a cada $f \in C(A)$ se le llama una 0-forma.

A las diferenciales usuales se les llama 1-formas:

$$f_1(X)dx_1 + f_2(X)dx_2 + \cdots + f_n(X)dx_n$$

Definición. $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}^n$. *Una k-forma (diferencial alternante) o FDA es una función $\varphi : \mathcal{I}_k \to C(A)$, donde*

$$\mathcal{I}_k := \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) : \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n; \quad i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}\}$$

es el conjunto de todos los k-tuplos de índices crecientes de enteros de 1 a n.

$$\mathcal{I}_k \ni (i_1, \ldots, i_k) \overset{\varphi}{\mapsto} \varphi(i_1, \ldots, i_k) \in C(A)$$

$$\varphi(i_1, \ldots, i_k)(X) =: \varphi_{i_1, \ldots, i_k}(X) \in \mathbb{R}$$

Una k-forma φ está especificada por sus componentes, k se llama el grado de φ. El conjunto de todas las k-formas se denota por $\mathcal{D}^k$. Así, p. ej., en $\mathbb{R}^3$:

0-forma tiene 1 componente: φ

1-forma tiene 3 componentes: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

$\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \varphi_3 dx_3$

2-forma tiene 3 componentes: $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$

$\varphi_{12} dx_1 \wedge dx_2 + \varphi_{13} dx_1 \wedge dx_3 + \varphi_{23} dx_2 \wedge dx_3$

3-forma tiene 1 componente: $\varphi_{123} : \varphi_{123} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

En general, en $\mathbb{R}^n$, una k-forma tiene $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ componentes.

Definimos la *suma* de formas de igual grado y el *producto* de una forma por una función:

Si, $\varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{D}^k$, entonces

$$(\varphi^1 + \varphi^2)(i_1, \ldots, i_k) := \varphi^1(i_1, \ldots, i_k) + \varphi^2(i_1, \ldots i_k)$$

El *producto* de $f \in C(A) = \mathcal{D}^o(A)$ por $\varphi \in \mathcal{D}^k$ se define $f \cdot \varphi \in \mathcal{D}^k$ mediante

$$(f \cdot \varphi)(i_1, \ldots, i_k) := f \cdot \varphi(i_1, \ldots, i_k)$$

Sean $\varphi, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3 \in \mathcal{D}^k, \quad f_1, f_2 \in C(A)$. Entonces

a) $(\varphi^1 + \varphi^2) + \varphi^3 = \varphi^1 + (\varphi^2 + \varphi^3)$

b) $(\varphi + 0) = \varphi$, donde $0(i_1, \ldots, i_k) = 0 \quad \forall (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_k$

c) $\varphi + (-\varphi) = 0$ donde $-\varphi := (-1)\varphi$

d) $(f_1 f_2)\varphi = f_1(f_2\varphi)$

f) $1\varphi = \varphi$

g) $(f_1 + f_2)(\varphi^1 + \varphi^2) = f_1\varphi^1 + f_1\varphi^2 + f_2\varphi^1 + f_2\varphi^2$

$\mathcal{D}^k$ es un "módulo" unitario sobre $C(A)$.

Expresión normal de una forma mediante k-formas elementales.

Definición. *Sea $(j_1, \ldots, j_k) \in \mathcal{I}_k$ fijo. La k-forma ψ definida por*

$$\psi(i_1, \ldots, i_k) := \begin{cases} 1 \text{ si } (i_1, \ldots, i_k) = (j_1, \ldots, j_k) \\ 0 \text{ si } (i_1, \ldots, i_k) \neq (j_1, \ldots, j_k) \end{cases}$$

se llama k-forma elemental y se abrevia por $\varepsilon^{j_1,\ldots,j_k}$. Se tiene entonces:

Teorema. *Si $\varphi \in \mathcal{D}^k$, entonces $\varphi = \sum\limits_{(i_1,\ldots,i_k)\in\mathcal{I}_k} \varphi(i_1, \ldots, i_k)\varepsilon^{i_1,\ldots,i_k}$ y la representación es única.*

$$\psi = \sum h_{i_1,\ldots,i_k}\varepsilon^{i_1,\ldots,i_k} = 0 \Longleftrightarrow h_{i_1\ldots i_k} = 0 \quad \forall (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_k.$$

Esta representación de φ se llama expresión normal de φ y las $h_{i_1\ldots i_k}$ se llaman sus "componentes". Abreviamos

$i_1,\ldots,i_k =: I_k =: I, \quad \varepsilon^{i_1,\ldots,i_k} =: \varepsilon^{I_k} =: \varepsilon^I$

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\mathcal{I}_k} = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} = \sum_{I\in\mathcal{I}_k} \quad \text{etc.}$$

Si $\varphi = \sum\limits_{I\in\mathcal{I}_k} h_I\varepsilon^I$ y $\widetilde{\varphi} = \sum\limits_{I\in\mathcal{I}_k} \widetilde{h}_I\varepsilon^I$, entonces $\varphi+\widetilde{\varphi} = \sum(h_I+\widetilde{h}_I)\varepsilon^I$ y si $f \in C(A)$ entonces $f\varphi = \sum\limits_{I\in\mathcal{I}_k} fh_I\varepsilon^I$

Multiplicación de formas

Sea $\varphi \in \mathcal{D}^k, \psi \in \mathcal{D}^\ell$. La multiplicación de φ por ψ denotada por $\varphi\wedge\psi$ se define como 0 si $k+\ell > n$. Primero definimos el producto de dos formas simples y después lo extendemos al caso general:

Sean $f_1, f_2 \in C(A)$, $\varphi^1 = \varepsilon^{i_1\cdots i_k} \in \mathcal{D}^k, \quad \varphi^2 = \varepsilon^{j_1,\ldots,j_\ell} \in \mathcal{D}^\ell$.

Entonces $(f_1\varphi^1) \wedge (f_2\varphi^2) := \pm f_1f_2\varepsilon^{s_1,\ldots,s_{k+\ell}} \in \mathcal{D}^{k+\ell}$, donde $s_1,\ldots,s_{k+\ell}$ es el $(k+\ell)$-tuplo de las $i_1,\ldots,i_k, j_1,\ldots,j_\ell$ ordenado en forma creciente; si dos índices son iguales, se define como 0; se escoje el signo "+" si la permutación necesaria para llevar $i_1,\ldots,i_k, j_1,\ldots,j_\ell$ al orden creciente es par y "−" si es impar.

Con esta definición se tiene

$\varepsilon^{i_1,\ldots,i_k} = \varepsilon^{i_1,\ldots,i_{k-1}} \wedge \varepsilon^{i_k} = \varepsilon^{i_1} \wedge \varepsilon^{i_2} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}$ y se tiene en particular las siguientes propiedades:

a) $\varepsilon^I \in \mathcal{D}^k, \varepsilon^J \in \mathcal{D}^\ell \Rightarrow \varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = (-1)^{k\ell} \varepsilon^J \wedge \varepsilon^I$, en particular $\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j = -\varepsilon^j \wedge \varepsilon^i$ y entonces $\varepsilon^i \wedge \varepsilon^i = 0$.

b) $\varepsilon_1 = \varepsilon^I \in \mathcal{D}^k, \varepsilon_2 = \varepsilon^J \in \mathcal{D}^\ell, \varepsilon_3 = \varepsilon^K \in \mathcal{D}^m$ sean formas elementales. Entonces $\varepsilon_1 \wedge (\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3) = (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2) \wedge \varepsilon_3$.

La definición del producto se extiende por linealidad a formas arbitrarias:

$\varphi = \sum_I g_I \varepsilon^I \in \mathcal{D}^k, \quad \psi = \sum_J h_J \varepsilon^J \in \mathcal{D}^\ell$

$$\varphi \wedge \psi := \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_k \\ j_1 < \cdots < j_\ell}} (g_{i_1 \ldots i_k} \cdot h_{j_1 \ldots j_\ell}) \varepsilon^{i_1, \ldots, i_k} \wedge \varepsilon^{j_1, \ldots, j_\ell} \in \mathcal{D}^{k+\ell}$$

y se tiene para $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}^k, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{D}^\ell$:

c) $(\varphi_1 + \varphi_2) \wedge (\psi_1 + \psi_2) = \varphi_1 \wedge \psi_1 + \varphi_1 \wedge \psi_2 + \varphi_2 \wedge \psi_1 + \varphi_2 \wedge \psi_2$ (ley distributiva)

d) $\varphi_1 \in \mathcal{D}^k, \varphi_2 \in \mathcal{D}^\ell, \varphi_3 \in \mathcal{D}^m \Rightarrow$ $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 = \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$ (ley asociativa)

e) $\varphi \in \mathcal{D}^k, \psi \in \mathcal{D}^\ell \Rightarrow \varphi \wedge \psi = (-1)^{k\ell} \psi \wedge \varphi$ (ley alternante)

Definición. *Sea $f \in C^1$. La 1-forma $df := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \varepsilon^j \in \mathcal{D}^1$ se* *llama la diferencial de f.*

Teorema. $f, g \in C^1 \Rightarrow d(f+g) = df + dg; d(fg) = fdg + gdf$

Observación: Sea $f_j(X) := x_j$. Entonces $df_j = dx_j = \varepsilon^j$, luego podemos escribir

$$\varepsilon^j =: dx_j, \varepsilon^I = \varepsilon^{i_1,\dots,i_k} = \varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k} =: dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Definición. *Sea* $\varphi = \sum g_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \in \mathcal{D}^k$, *con* $g_i \in C^1$. *Entonces*

$$\begin{aligned} d\varphi &:= \sum (dg_{i_1,\dots,i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_I \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_I}{\partial x_j} dx_j \wedge (dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) \in \mathcal{D}^{k+1} \end{aligned}$$

Teorema. *Si* $f \in C^1 = \mathcal{D}^0; \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}^k \Rightarrow$

$d(\varphi_1 + \varphi_2) = d\varphi_1 + d\varphi_2; d(f\varphi) = df \wedge \varphi + fd\varphi.$

Si $\varphi = \varphi^k \in \mathcal{D}^k, \psi = \psi^\ell \in \mathcal{D}^\ell \Rightarrow$

$d(\varphi^k \wedge \varphi^\ell) = d\varphi^k \wedge \varphi^\ell + (-1)^k \varphi^k \wedge d\psi^\ell.$

Si $f \in C^2 \Rightarrow d(df) =: d^2 f = 0.$

Si $\varphi \in \mathcal{D}^k \Rightarrow d(d\varphi) = d^2\varphi = 0$, *si* $g_i \in C^2$.

Teorema. *Si* $\varphi_j = \sum_{i=1}^n g_{ij} dx_i \quad (j = 1, \dots, n)$, *entonces*

$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n = \det(g_{ij}) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Transporte ("pull-back") de FDA.

Sean $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y $F : A \to B$ una transformación diferenciable $F = (f_1, \ldots, f_m); \varphi =$
$= \sum g_I dy_I \in \mathcal{D}^k(B)$.

Definición. *La composición (transporte o "pull back") de φ con F se define por*

$$\varphi \circ F := \sum_I (g_I \circ F) df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_k} \in \mathcal{D}^k(A)$$

$$\mathbb{R}^n \supset A \ni \mathrm{X} \overset{F}{\mapsto} \mathrm{Y} \in B \subset \mathbb{R}^m$$

$$A \ni (x_1, \ldots, x_n) \overset{(f_1,\ldots,f_m)}{\mapsto} (y_1, \ldots, y_m) \in B$$

$$\mathcal{D}^k(A) \qquad\qquad \mathcal{D}^k(B)$$

$$\varphi \circ F \longleftarrow\!\!\shortmid \varphi$$

Se tienen las siguientes propiedades:

Teorema. $F : A \to B, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}^k(B)$, $\psi \in \mathcal{D}^\ell(B)$,
$f, g \in C(B)$. *Entonces*

1) $(f + g) \circ F = f \circ F + g \circ F$

2) $(\varphi_1 + \varphi_2) \circ F = \varphi_1 \circ F + \varphi_2 \circ F$

3) $(fg) \circ F = (g \circ F)(f \circ F)$

4) $(g\varphi) \circ F = (g \circ F)(\varphi \circ F)$

5) $(\varphi \wedge \psi) \circ F = (\varphi \circ F) \wedge (\psi \circ F)$

6) $d(g \circ F) = (dg) \circ F$

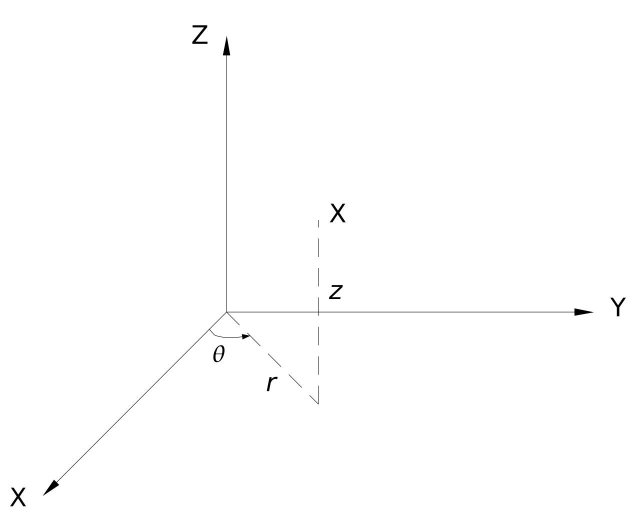
7) $d(\varphi \circ F) = (d\varphi) \circ F$

8) $(\varphi \circ F) \circ G = \varphi \circ (F \circ G)$

donde $G : B \to C$.

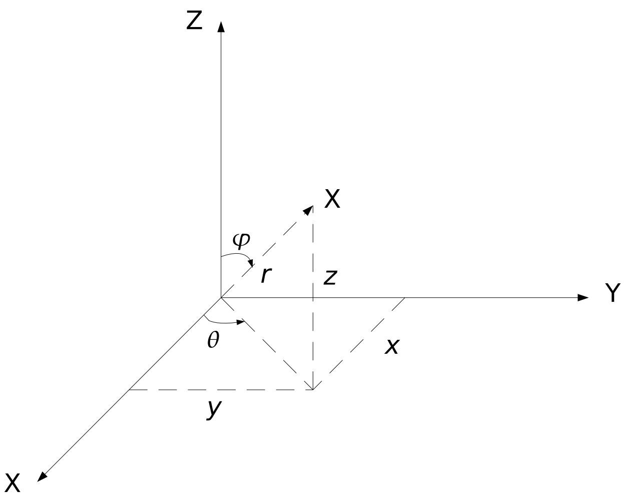
Ejemplo 1): Sea F el cambio de coordenadas cilíndricas a cartesianas:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\mathrm{sen}\theta \\ z &= z \\ (x,y,z) &= F(r,\theta,z) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} dx &= \cos\theta dr - r\text{sen}\theta d\theta \\ dy &= \text{sen}\theta dr + r\cos\theta d\theta \\ dz &= dz \\ dx \wedge dy &= r\cos^2\theta dr \wedge d\theta - r\text{sen}^2\theta d\theta \wedge dr = r dr \wedge d\theta \\ dx \wedge dy \wedge dz &= r dr \wedge d\theta \wedge dz. \end{aligned}$$

Ejemplo 2): Sea F el cambio de coordenadas esféricas a cartesianas:



$$\begin{aligned} x &= r\text{sen}\varphi\cos\theta \\ y &= r\text{sen}\varphi\text{sen}\theta \\ z &= r\cos\varphi \end{aligned}$$

$dx \wedge dy \wedge dz = r^2\text{sen}\varphi dr \wedge d\varphi \wedge d\theta.$

Integración de formas diferenciales

Se definen las integrales de línea, superficie, volumen, etc., mediante la integración de FDA sobre las imágenes diferenciables de intervalos, rectángulos, paralelepípedos, etc.; imágenes que llamamos simplejos diferenciables.

Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ abierto o producto de intervalos.

$F : A \to \mathbb{R}^n$ se llama **regular** en $X_0 \in A$ si $\exists$ vecindad de X_0 tal que F es continuamente diferenciable con

$J_F(X_0) \neq 0$. Por cálculo sabemos

$$\int_{F(A)} g(Y)dY = \int_A (g \circ F)(X)|J_F(X)|dX.$$

Si

$$\varphi := g(Y)dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

$$(\varphi \circ F)(X)df_1 \wedge \cdots \wedge df_n \;=\; (\varphi \circ F)(X)\det(\frac{\partial f_j}{\partial x_k})(X)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Entonces, si $B = F(A)$,

$$\int_B \varphi := \int_B g(Y)dY = \int_B g(Y)dy_1 \cdots dy_n.$$

y si $J_F(X) > 0 \quad \forall X \in A, \quad \int_{F(A)} \varphi = \int_A \varphi \circ F.$

Integrales de FDA

Usaremos simplejos diferenciables para generalizar los conceptos de integración sobre líneas, superficies, volúmenes, etc.

Sea $Q \subset \mathbb{R}^n$ el producto de n intervalos cerrados y acotados, con interior no vacío. Q es compacto y lo llamamos *n-bloque compacto*.

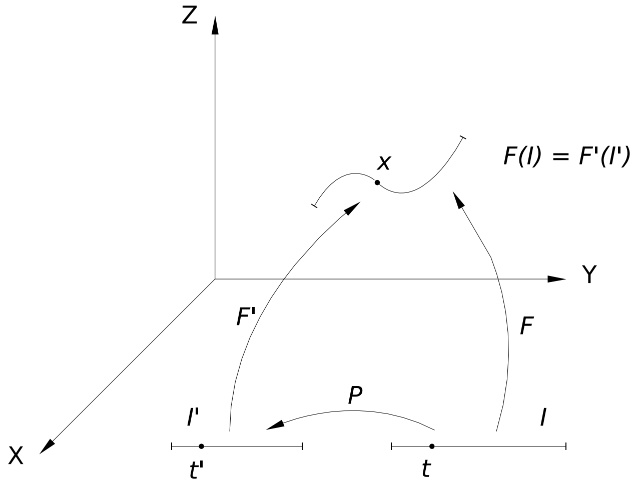
$$T = (t_1, \ldots, t_n) \in Q, \quad F(T) = (f_1, \ldots, f_m)(T) \in \mathbb{R}^m.$$

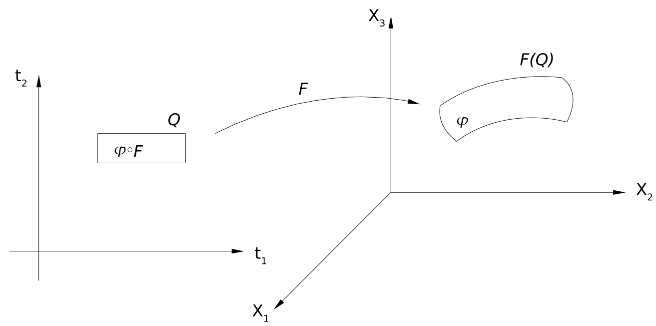
Consideramos las ternas $S := (Q, F, F(Q))$.

Definición. *Sean $Q, Q' \subset \mathbb{R}^n$ n–bloques compactos. La transformación $P : Q' \to Q$ se llama* **transformación paramétrica** *cuando P es biyectiva, P y P^{-1} continuamente diferenciables y*

$$J_P(T') > 0 \ \ \forall T' \in Q'.$$

Una clase de equivalencia $\mathcal{S}$ de ternas S bajo transformaciones paramétricas se llama n–simplejo diferenciable en $\mathbb{R}^m$. La imagen $F(Q)$ de un n-simplejo no depende de la parametrización F y se llama traza de $\mathcal{S}$: $|\mathcal{S}| = F(Q)$.





Definición. *Sea* $\mathcal{S} = [(Q, F, F(Q))]$ *un n–simplejo en* $\mathbb{R}^m$ *y* φ *una n–forma definida en* $|\mathcal{S}|$. *Se define*

$$\int_{\mathcal{S}} \varphi := \int_Q \varphi \circ F.$$

Se demuestra que la integral no depende de la parametrización de $\mathcal{S}$.

Ejemplo 1): Integrales de línea. Sea $n = 1$ y $m \geq 1$.

El 1–simplejo $\mathcal{L} = (I, R, R(I))$ con $X = R(t) = (r_1(t), \ldots, r_m(t))$, $t \in [a, b]$, se llama curva diferenciable si R es biyectiva y $dR \neq 0$. Si $\varphi = \sum_{j=1}^{m} f_j(X)dx_j \in \mathcal{D}^1(A)$, entonces

$$\int_{\mathcal{L}} \varphi = \int_I \varphi \circ R = \int_I [\sum (f_j \circ R)(t) r_j'(t)] dt.$$

Si interpretamos φ como un campo vectorial

$$\vec{F}(X) = (f_1(X), \ldots, f_m(X)),$$

se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} \varphi &= \int_{|\mathcal{L}|} f_1(X)dx_1 + \cdots + f_m(X)dx_m = \int_{|\mathcal{L}|} \vec{F} \cdot d\vec{R} \\ &= \int_I (\vec{F} \cdot \vec{R}')dt \quad \text{con} \quad X = R(t), \\ d\vec{R} &= (dr_1, \ldots, dr_m) = \vec{R}'(t)dt = (r_1'(t)dt, \ldots, r_m'(t)dt) \end{aligned}$$

"Trabajo desarrollado por la fuerza $\vec{F}$ a lo largo de la curva $\mathcal{L}$" donde $\vec{R}$ es el vector de posición. Si t es el tiempo, $\vec{R}'$ es el vector velocidad con que se recorre $\mathcal{L}$ y es tangente a la curva.

Ejemplo 2): Integrales de superficie. Sea $n = 2$ y $m > 2$; $\mathcal{S} = (Q, S, S(Q))$ es un simplejo diferenciable con $X = S(T) = (s_1(t_1, t_s), \ldots, s_m(t_1, t_2))$, con $T = (t_1, t_2) \in Q \subset \mathbb{R}^2$, $\psi = \sum_{1 \leq i < j \leq m} g_{ij}(X)dx_i \wedge dx_j \in \mathcal{D}^2$.

Entonces $\int_{\mathcal{S}} \psi = \int_Q \psi \circ S = \int_Q \sum_{i<j} (g_{ij} \circ S) ds_i \wedge ds_j$.

Si $m = 3$, $\psi = g_{23} dx_2 \wedge dx_3 + g_{13} dx_1 \wedge dx_3 + g_{12} dx_1 \wedge dx_2$ y si a ψ se le hace corresponder el campo vectorial $\vec{G} := (g_1, g_2, g_3) = (g_{23}, g_{13}, g_{12})$ y a la parametrización S se le hace corresponder el vector $\vec{S}(t_1, t_2) = (s_1, s_2, s_3)(t_1, t_2)$, entonces los vectores $\frac{\partial \vec{S}}{\partial t_1}$ y $\frac{\partial \vec{S}}{\partial t_2}$ son tangentes a la superficie $S(Q)$ y $\frac{\partial \vec{S}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial t_2}$ es un vector normal a la superficie y

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{S}}{\partial t_1} \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial t_2} dt_1 dt_2 = \vec{n} dA$$

y se tiene

$$\int_{\mathcal{S}} \psi = \int_{S(Q)} \vec{G} \cdot d\vec{A}.$$

Las integrales sobre n–simplejos se pueden extender fácilmente por linealidad a n–cadenas, que son combinaciones lineales con coeficientes enteros de n–simplejos y también definir la frontera de simplejos y de cadenas. Definimos las i–ésimas caras superiores o inferiores de un n–bloque $Q = \{(t_1, \ldots, t_n) : a_j \leq t_j \leq b_j, 1 \leq j \leq n\} \subset \mathbb{R}^n$ como sigue:

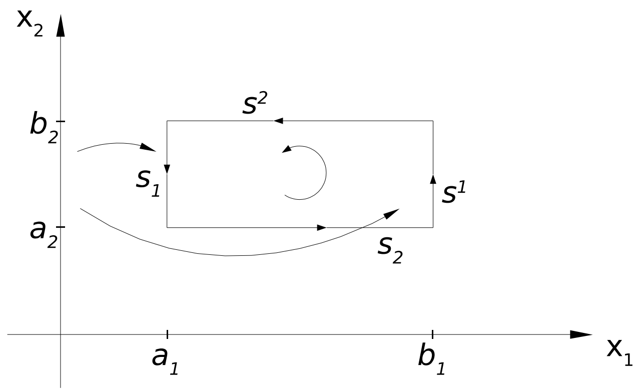
$Q_i := \{(t_1, \ldots, \widehat{t_i}, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \quad a_j \leq t_j \leq b_j,\ j = 1, \ldots, n, j \neq i\}$

para toda $i = 1, \ldots, n$, con

$(t_1, \ldots, \widehat{t_i}, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n) =: T_i \in Q_i$.

Definimos la i–ésima cara superior de Q mediante $\tau^i : Q_i \to Q \subset \mathbb{R}^n$ con $\tau^i(T_i) = X$, y $x_j = t_j$ si $j \neq i$ y $x_i = b_i$ y respectivamente la inferior $\tau_i : Q_i \to Q \subset \mathbb{R}^n$ con $\tau_i(T_i) = X$ y $x_j = t_j$, si $j \neq i$ y $x_i = a_i$.

Abreviamos $\tau^i Q_i =: S^i$, $\tau_i Q_i =: S_i$



La frontera topológica de Q es $\bigcup_i S^i \cup \bigcup_i S_i$. Si se pone $\partial_i Q := (-1)^i(Q_i, \tau_i S_i)$ y $\partial^i Q := (-1)^{i+1}(Q_i, \tau^i, S^i)$ entonces la **frontera orientada** de Q es una n–cadena

$\partial Q = \sum_{i=1}^{n}(\partial_i Q + \partial^i Q)$ y tenemos:

Teorema. (Teorema de Stokes para n–bloques)

$\varphi \in \mathcal{D}^{n-1}(Q)$, Q *n–bloque. Entonces* $\int_{\partial Q} \varphi = \int_Q d\varphi$.

El teorema se extiende de inmediato a n–simplejos:

Definición. *Si $\mathcal{S} = (Q, F, F(Q))$ es un n–simplejo, la frontera $\partial \mathcal{S}$ de $\mathcal{S}$ es la $(n-1)$ cadena dada por $\partial \mathcal{S} := \sum_{i=1}^{n}(\partial_i \mathcal{S} + \partial^i \mathcal{S})$, donde $\partial_i \mathcal{S} := (-1)^i(Q_i, F \circ \tau_i, F(S_i))$ y*

$\partial^i \mathcal{S} = (-1)^{i+1}(Q_i, F \circ \tau^i, F(S^i)).$

Teorema. (Stokes para simplejos)

Sea $\mathcal{S} = (Q, F, F(Q))$ un n–simplejo en $\mathbb{R}^m$. F sea dos veces continuamente diferenciable, $\varphi \in \mathcal{D}^{n-1}$ una vez continuamente diferenciable en una vecindad V de $F(Q) = |\mathcal{S}|$. Entonces $\int_{\partial \mathcal{S}} \varphi = \int_{\mathcal{S}} d\varphi$.

Ejemplo 1): Si $m = n = 2$ obtenemos el **Teorema de Green en el plano**.

$\varphi = g_1(x, y)dx + g_2(x, y)dy.$

$F(u, v,) = (f_1(u, v), f_2(v, u))$ biyectiva y regular en Q. Entonces

$$d\varphi = (\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y})dx \wedge dy,$$
$$\int_{\mathcal{S}} d\varphi = \iint_{F(Q)} (\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y})dx \wedge dy = \iint_{|\partial \mathcal{S}|} (g_1 dx + g_2 dy).$$

Ejemplo 2): Si $m = n = 3$, se obtiene el **Teorema de Gauss**

$$\psi = g_1 dx_2 \wedge dx_3 + g_2 dx_3 \wedge dx_1 + g_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

S biyectiva y regular en Q, $\mathcal{S}$ un 3 simplejo en $\mathbb{R}^3$,

$$d\psi = (\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 =$$

$$\begin{aligned}
&= (\operatorname{div}\vec{G})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,\\
\int_{\mathcal{S}} d\psi &= \int_{|\mathcal{S}|} (\operatorname{div}\vec{G})dx_1dx_2dx_3 =\\
&= \int_{\partial\mathcal{S}} \psi = \int_{\partial\mathcal{S}} (g_1dx_2 \wedge dx_3 + g_2dx_3 \wedge dx_1 + g_3dx_1 \wedge dx_2)\\
&= \iint_{|\mathcal{S}|} \vec{G}\cdot d\vec{A}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3): Si $n = 2$, $m = 3$ se obtiene el **Teorema (clásico) de Stokes**

$$\varphi = g_1dx + g_2dy + g_3dz$$

$$d\varphi = (\frac{\partial g_3}{\partial y}-\frac{\partial g_2}{\partial z})dy\wedge dz+(\frac{\partial g_1}{\partial z}-\frac{\partial g_3}{\partial x})dz\wedge dx+(\frac{\partial g_2}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial y})dx\wedge dy$$

$$\iint_{|\mathcal{S}|} = (\mathbf{rot}\ \vec{G})\cdot d\vec{A} = \int_{|\partial\mathcal{S}|} \vec{G}\cdot d\vec{A}$$

El operador $*$ de Hodge y su aplicación a las fórmulas del análisis vectorial.

Definimos un operador $* : \mathcal{D}^k \to \mathcal{D}^{n-k}$ por extensión lineal a partir de su acción sobre k-formas elementales.

Definición.

$*(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) := \operatorname{sig}(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k})(dx_{j_1} \wedge \ldots$
$\ldots \wedge dx_{j_{n-k}})$, *donde* $i_r \neq j_s$ *para* $\forall r = 1, \ldots, k$ *y* $\forall s = 1, \ldots, n-k$.

Si $\mathcal{D}^k \ni \varphi = \sum_I f_{i_1,\ldots,i_k}(X)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$*, entonces*

$$*\varphi := \sum_I f_{i_1\ldots,i_k}(X) * (dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}).$$

Teorema. *a)* $*(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})$ *es la única* $(n-k)$*- forma elemental con signo* $+$ *ó* $-$ *que cumple con*

$$(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) \wedge *(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

b) $\varphi \in \mathcal{D}^k \Rightarrow **\varphi = (-1)^{k(n-k)}\varphi.$

c) $\varphi, \psi \in \mathcal{D}^k \Rightarrow *(f\varphi + g\psi) = f*\varphi + g*\psi.$

Ejemplos: Sea $n = 3$.

1) Si $f \in \mathcal{D}^0$, entonces $*f = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, y $**f = f$.

2) Si $\alpha = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_e \in \mathcal{D}^1$, entonces

$*\alpha = a_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_3 \wedge dx_1 + a_3 dx_1 \wedge dx_2$, y

$**\alpha = \alpha$.

3) Si $\beta = b_1 dx_2 \wedge dx_3 + b_2 dx_3 \wedge dx_1 + b_3 dx_1 \wedge dx_2 \in \mathcal{D}^2$, entonces

$*\beta = b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3$, y

$**\beta = \beta$.

4) Si $\gamma = c dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \in \mathcal{D}^3$, entonces $*\gamma = c$, y

$**\gamma = \gamma$.

Por lo anterior $** = *^2$ es la identidad para $k = 0, 1, 2, 3$ y $n = 3$.

Definición. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto o n-bloque compacto y $\mu = u_1 dx_1 + \ldots + u_n dx_n \in \mathcal{D}^1(A)$. Entonces se define $\mathbf{v}\mu := (u_1, \ldots, u_n) =: \vec{U} =: U$ ("campo vectorial en A") y $\mathbf{v}^{-1}\vec{U} = \mathbf{v}^{-1}U = u_1 dx_1 + \ldots + u_n dx_n$.*

Observación: $\mathbf{v}\mathbf{v}^{-1}\vec{U} = \vec{U},\ \mathbf{v}^{-1}\mathbf{v}\mu = \mu$.

Establecemos ahora la relación con varias fórmulas del análisis vectorial, que en particular formalizan, generalizan y demuestran fácilmente los tres ejemplos anteriormente dados.

Teorema. Sea $A \subset \mathbb{R}^3$ abierto o n-bloque compacto, $f : A \to \mathbb{R}$ y $\vec{U} : A \to \mathbb{R}^3$ diferenciables (basta C^1). Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}\ f &= \mathbf{v}df \\
\mathbf{rot}\ \vec{U} &= \mathbf{v} * d\mathbf{v}^{-1}\vec{U} \\
\mathrm{div}\vec{U} &= *d * \mathbf{v}^{-1}\vec{U}.
\end{aligned}$$

Teorema. *$f, g : A \to \mathbb{R}, \vec{U}, \vec{V} : A \to \mathbb{R}^3$ diferenciables.*

Entonces:

$$\begin{aligned}
\textbf{grad }(fg) &= (\textbf{grad } f)g + f\textbf{grad } g \\
\textbf{rot }(f\vec{U}) &= (\textbf{grad } f)\times\vec{U} + f\textbf{rot } \vec{U} \;\; (\times = \text{producto vectorial}) \\
\mathrm{div}(f\vec{U}) &= (\textbf{grad } f)\cdot\vec{U} + f\mathrm{div}\vec{U} \;\; (\cdot = \text{producto escalar de vectores}) \\
\mathrm{div}(\vec{U}\times\vec{V}) &= \vec{V}\cdot\textbf{rot } \vec{U} - \vec{U}\cdot\textbf{rot } \vec{V} \\
\textbf{rot } \;(\textbf{grad })f &= 0 \\
\mathrm{div}\;\textbf{rot } \vec{U} &= 0.
\end{aligned}$$

Definición. *Sea $\mathcal{L} := (I, R, R(I))$ un 1-simplejo diferenciable con $dR \neq 0$ y $R(I) \subset A$. Entonces*

$$\int_{|\mathcal{L}|} \vec{U}\cdot d\vec{R} := \int_{\mathcal{L}} \mathbf{v}^{-1}\vec{U}.$$

Observación: $\int_{\mathcal{L}} \mathbf{v}^{-1}\vec{U} = \int_I (\mathbf{v}^{-1}\vec{U}) \circ R$. Nótese que usualmente se define en análisis vectorial la integral de línea mediante una parametrización en función de la longitud de la curva, usando por lo tanto (2 veces) la métrica en $\mathbb{R}^3$.

Teorema. *Sea $\mathcal{L}$ una curva diferenciable con R tal que $dR \neq 0$, f continuamente diferenciable en una vecindad de $|\mathcal{L}|$. Entonces:* $\int_{\mathcal{L}}(\textbf{grad } f)\cdot d\vec{R} = f(R(b)) - f(R(a))$*, donde*

$I = [a, b]$.

Observación: Si $\mathcal{P} = (a, P, P(a))$ es un 0-simplejo y $\varphi \in \mathcal{D}^0$, $\int_P \varphi := \varphi \circ P(a)$. $\quad \partial\mathcal{L}$ es la 0-cadena $(b, R, R(b)) - (a, R, R(a))$, por lo que si $\varphi \in \mathcal{D}^0$, $\int_{\partial\mathcal{L}} \varphi := \varphi(R(b)) - \varphi(R(a))$.

Definición. *Sea $\mathcal{S} = (Q, F, F(Q))$ un 2-simplejo tal que el rango de J_F es 2 y $\vec{U}$ es un campo vectorial continuo en $|\mathcal{S}|$. Entonces: $\int_{|\mathcal{S}|} \vec{U} \cdot d\vec{A} := \int_{\mathcal{S}} *\mathbf{v}^{-1}\vec{U}$.*

Observación: La definición vectorial usual utiliza también 2 veces la métrica de $\mathbb{R}^3$. En particular, si $\vec{n}$ es el campo vectorial unitario normal a $|\mathcal{S}|$, se define área $(\mathcal{S}) := \int_{|\mathcal{S}|} \vec{n} \cdot d\vec{A}$.

Teorema. *Sea $\vec{U}$ un campo vectorial diferenciable en una vecindad de la traza de un 2-simplejo $\mathcal{S}$ con rango de $J_F = 2$. Entonces:*

$$\int_{|\mathcal{S}|} \mathbf{rot}\ \vec{U} \cdot d\vec{A} = \int_{|\partial\mathcal{S}|} \vec{U} \cdot d\vec{R}.$$

Demostración:

$\int_{\mathcal{S}} *\mathbf{v}^{-1}\mathbf{v} * d\mathbf{v}^{-1}\vec{U} = \int_{\mathcal{S}} d\mathbf{v}^{-1}\vec{U} = \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{v}^{-1}\vec{U} = \int_{|\partial\mathcal{S}|} \vec{U} \cdot d\vec{R}$.

Teorema *(Gauss) Sea* $\mathcal{S} = (Q, S, S(Q))$ *un 3-simplejo en* $\mathbb{R}^3$ *con jacobiano* $|J_S| > 0$ *y* $\vec{U}$ *un campo vectorial en una vecindad de* $S(Q)$*. Entonces:* $\int_{|\mathcal{S}|} (\mathrm{div}\vec{U}) dxdydz = \int_{|\partial\mathcal{S}|} \vec{U} \cdot d\vec{A}$.

Demostración: $\int_{|\mathcal{S}|} (\mathrm{div}\vec{U}) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{|\mathcal{S}|} (*d{*}\mathbf{v}^{-1}\vec{U}) dx_1\, dx_2 dx_3 = \int_{\mathcal{S}} d * \mathbf{v}^{-1}\vec{U} = \int_{\partial g} *\mathbf{v}^{-1}\vec{U} = \int_{|\mathcal{S}|} \vec{U} \cdot d\vec{A}$.

Ecuaciones de Maxwell

Indicamos como pueden expresarse las ecuaciones de la teoría electromagnética mediante FDA, en forma sencilla (usando unidades adecuadas).

Al vector intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$ en $\mathbb{R}^3$ le asociamos una 1-forma, que denotamos (abusando de la notación) por E, mediante $E := \mathbf{v}^{-1}\vec{E} = E_1 dx_1 + E_2 dx_2 + E_3 dx_3$. Al (pseudo-) vector (o vector "axial") inducción magnética $\vec{B}$ (cuyo sentido depende de la orientación del sistema de coordenadas) le asociamos una 2-forma $B := *\mathbf{v}^{-1}\vec{B} = B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2$.

Entonces div $\vec{B} = 0$ y **rot** $\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -\dot{\vec{B}}$ se expresan por

(A) $dB = 0$ y $dE = -B$.

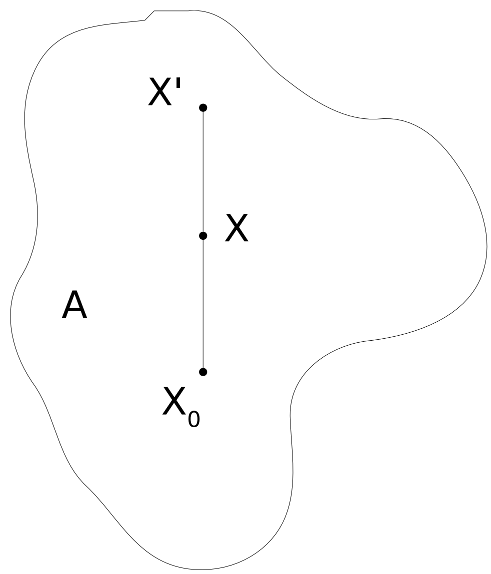
Similarmente, si asociamos la 1-forma $H := \mathbf{v}^{-1}\vec{H}$ al vector intensidad de campo magnético y las 2-formas $D := *\mathbf{v}^{-1}\vec{D}$ y $J := *\mathbf{v}^{-1}\vec{J}$ al desplazamiento eléctrico y a la densidad de corriente eléctrica, respectivamente, vemos que div $\vec{D} = 4\pi\rho$ y **rot** $\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\dot{\vec{D}}$ se escriben

(B) $dD = *4\pi\rho;\ dH = \frac{4\pi}{c}J + \frac{1}{c}\dot{D}$.

Las ecuaciones (A) y (B) son invariantes respecto a transformaciones diferenciables de coordenadas ("difeomorfismos"), lo que tiene un profundo significado físico. También es fácil tratar la invariancia relativista de las ecuaciones de Maxwell.

A partir de las ecuaciones anteriores se pueden definir formas diferenciales correspondientes a los potenciales y deducir soluciones de dichas ecuaciones . Para encontrar soluciones es útil el "*Lema de Poincaré*" y que damos sin demostración.

Definición: Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se llama "*estrellado*", cuando $\exists X_0 \in A \ni \forall X' \in A, X = X_0 + (X' - X_0)t \in A$ para $\forall 0 \leq t \leq 1$. Esto es, para todo $X' \in a$, el segmento de recta de X_0 a X' está completamente en A (ver figura).



Teorema. (Lema de Poincaré) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y estrellado, $\varphi \in \mathcal{D}^k(A)$ tal que $d\varphi = 0$. Entonces

$\exists \psi \in \mathcal{D}^{k-1}(A)$ tal que $\varphi = d\psi$.

Corolario: 1.- Si **rot** $\vec{U} = 0$ en $A, \exists f$ diferenciable en A tal que $\vec{U} =$ **grad** f.

2.- Si div $\vec{V} = 0$ en $A, \exists$ campo vectorial $\vec{U}$ diferenciable en A tal que $\vec{V} = \textbf{rot } \vec{U}$.

3.- Si f es diferenciable en A, $\exists \vec{U}$ tal que $f = \mathrm{div}\vec{U}$.

Estas tres propiedades resultan inmediatamente del Lema de Poincaré:

1) $\textbf{rot } \vec{U} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} * d\mathbf{v}^{-1}\vec{U} = 0 \Rightarrow d\mathbf{v}^{-1}\vec{U} = 0 \Rightarrow$

$\exists \psi = f \in \mathcal{D}^0 \ \mathbf{v}^{-1}\vec{U} = df \Rightarrow \vec{U} = \mathbf{v}df = \textbf{grad } f$.

2) $\mathrm{div}\vec{V} = 0 \Rightarrow *d * \mathbf{v}^{-1}\vec{V} = 0 \Rightarrow d * \mathbf{v}^{-1} = 0 \Rightarrow$

$\exists \psi \in \mathcal{D}^1 * v^{-1}\vec{V} = d\psi \Rightarrow * * \mathbf{v}^{-1}\vec{V} = \mathbf{v}^{-1}\vec{V} = *d\psi \Rightarrow$

$\vec{V} = \mathbf{v} * d\psi \Rightarrow \vec{V} = \textbf{rot } \vec{U}$ con $\vec{U} = \mathbf{v}\psi$.

3) $*f \in \mathcal{D}^3 \Rightarrow d * f = 0 \Rightarrow \exists \psi \in \mathcal{D}^2$ tal que $*f = d\psi \Rightarrow$ $f = *d\psi \Rightarrow f = *d\psi = *d * \psi'$, con $\psi' = *\psi = v^{-1}\vec{U} \in \mathcal{D}^1 \Rightarrow$ $f = \mathrm{div}\vec{U}$.

Otras aplicaciones y generalizaciones

Análisis complejo

Sea $z = x + iy$ y $\overline{z} = x - iy$. Entonces $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

$$dz := dx + idy \qquad d\overline{z} := x - idy$$

$A \subset \mathbb{C}$ abierto o 2-bloque

$$f : A \to \mathbb{C}, \quad \text{con} \quad f = u + iv,$$

sea diferenciable en el sentido real, esto es

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$df := du + idv = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

$= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$

Expresando a x y y en función de z y $\overline{z}$ y definiendo $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ y $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ se obtiene

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} =: \partial f + \overline{\partial} f.$$

La condición que expresa que df es una diferencial lineal compleja en dz es $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, lo que equivale a $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, o equivalentemente

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

que se llaman las "Ecuaciones de Cauchy-Riemann".

Se define: f holomorfa en $A :\Leftrightarrow f$ es diferenciable y satisface las condiciones de Cauchy-Riemann.

Para desarrollar la teoría de integrales complejas, introducimos la integral de línea en $\mathbb{C}$.

Si α y β son k–formas reales en $A \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ como antes $(k = 0, 1, 2,)$, definimos también $d(\alpha + i\beta) = d\alpha + id\beta$ y si γ y δ son ℓ formas reales en A, $(\alpha + i\beta) \wedge (\gamma + i\delta) := \alpha \wedge \gamma - \beta \wedge \delta + i(\beta \wedge \gamma + \alpha \wedge \delta)$ y similarmente el transporte de una forma compleja.

Por lo tanto, $d(fdz) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz$ y $d(fdz) = 0$ sí y sólo sí f satisface las condiciones de Cauchy–Riemann.

Si $\mathcal{S} = (Q, F, F(Q))$ es un k–simplejo diferenciable en A, escribimos $F = f_1 + if_2$ y si $\varphi = \alpha + i\beta$ es una k–forma en $|\mathcal{S}|$, definimos $\int_{\mathcal{S}} (\alpha + i\beta) := \int_{\mathcal{S}} \alpha + i \int_{\mathcal{S}} \beta$.

Teorema integral de Cauchy: Si f es holomorfa en A, entonces $\int_{\partial\mathcal{S}} f(z)dz = 0$ para cualquier 2–simplejo diferenciable $\mathcal{S}$ con $|\mathcal{S}| \subset A$.

En efecto, en virtud de que $d(f dz) = 0$, se tiene, por el teorema de Stokes, $\int_{\partial\mathcal{S}} f dz = \int_{\mathcal{S}} d(f dz) = 0$.

Otra consecuencia sencilla de las notaciones anteriores es la factorización del Laplaciano: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$

Variedades diferenciables (reales y complejas)

Las propiedades invariantes de las FDA bajo transformaciones de coordenadas permiten su generalización directa a las variedades diferenciables, ya que estas están definidas localmente como abiertos en $\mathbb{R}^n$ con transformaciones diferenciables entre los cambios de coordenadas locales.

Grupos (módulos, anillos) de cohomología

Como $d^2 = 0$, puede formarse la siguiente sucesión

$$0 \to \mathcal{D}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{D}^1 \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \mathcal{D}^n \xrightarrow{d} 0$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}^k$ y si $d\varphi = 0$ decimos que φ es cerrada y denotamos por $\mathcal{A}^k$ al subconjunto (subespacio) que consiste de las formas cerradas en $\mathcal{D}^k$. Si existe una forma $\psi \in \mathcal{D}^{k-1}$ tal que $\varphi = d\psi$, entonces decimos que φ es exacta y observamos que una forma exacta es también cerrada porque $d^2 = 0$. Por lo tanto $d\mathcal{D}^{k-1}$, el espacio de formas exactas es un subespacio de $\mathcal{A}^k$ y podemos formar el espacio cociente $H^k := \mathcal{A}^k/d\mathcal{D}^{k-1}$ de formas exactas respecto a las cerradas $d\mathcal{D}^{k-1} \subset \mathcal{A}^k \subset \mathcal{D}^k$.

Estos espacios se llaman espacios (grupos, módulos) de **cohomología de de Rham**.

En variedades diferenciables la cohomología de de Rham es isomorfa a las cohomologías de Čech, la simplicial y a la singular, que se definen en topología algebraica, lo que nos relaciona íntimamente las propiedades geométricas con las propiedades analíticas en las variedades diferenciables.

Análisis en cuaternios y en álgebras de Clifford

El análisis complejo sobre $\mathbb{C}$ puede extenderse a los cuaternios $\mathbb{H}$ y a álgebras mas generales:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^n & \mathbb{C}^2 \arrow[r] & \mathbb{C}^n & & \text{(esp. vector.)} \\
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[ur] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & \mathbb{H} \arrow[r] & \mathbb{O} \arrow[r] & \mathbb{A} & \text{(álgebras de C-D)} \\
 & & \mathcal{C}\ell_2 \arrow[r] & \mathcal{C}\ell_n & & \text{(antisim., asoc.)}
\end{tikzcd}$$

$1, i \to \mathbb{C}$ $\qquad i^2 = -1$

$\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \to \mathbb{H}$ $\qquad \mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=-\mathbf{1}, \;\; \mathbf{ij} = -\mathbf{ji}$, etc.

$\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \to \mathcal{C}\ell_n$

$\mathbf{e}_i^2 = -1 \quad i = 1, \ldots, r$

$\mathbf{e}_i^2 = +1 \quad i = \underbrace{r+1, \ldots, n}_{s}$

$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i \quad i, j = 1, \ldots, n, i \neq j$

$\to \mathcal{C}\ell_{rs}$.

Se puede hacer análisis sobre $C\ell_n$, definiendo operadores diferenciales similares a los de Wirtinger:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{e}_0\frac{\partial}{\partial x_0} - \mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \cdots - \mathbf{e}_n\frac{\partial}{\partial x_n}\\ \widetilde{\mathbf{D}} &= \mathbf{e}_0\frac{\partial}{\partial x_0} + \mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \mathbf{e}_n\frac{\partial}{\partial x_n}.\end{aligned}$$

Como en $\mathbb{C}$ se define a las funciones holomorfas (regulares, monogénicas, hiperholomorfas,...) como elementos con $\widetilde{\mathbf{D}}f = 0$, y se obtienen los teoremas de Stokes, Cauchy, Bergman, se factoriza el Laplaciano: $\mathbf{D}\widetilde{\mathbf{D}} = \Delta = \widetilde{\mathbf{D}}\mathbf{D}$, etc.

Por ejemplo, el teorema de Stokes se expresa como sigue:

$$\int_G (\mathbf{fD})\cdot\mathbf{g} + \mathbf{f}\cdot(\mathbf{Dg}) = \int_{\partial G}\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}, \quad \text{donde}$$

$$(\mathbf{fD}) = \sum(\partial_i\mathbf{f})\mathbf{e}_i\ ; \quad \mathbf{Dg} = \sum \mathbf{e}_i(\partial_i\mathbf{g}),$$

para $\mathbf{f}, \mathbf{g} : G \to C\ell_n; \quad G \subset \mathbb{R}^{n+1}$.